

Epreuve de Mathématiques

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est strictement interdit. Les surveillants et surveillantes se réservent le droit de les confisquer.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance. La présence d'une information d'identification en dehors du cartouche donnera lieu à un point de pénalité et la page concernée pourra être soustraite de la correction.

Exercice 1

Soit f la fonction 2π -périodique et impaire définie par

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \quad \text{pour } t \in]0, \pi[\text{ et } f(0) = 0.$$

On note $S(t)$ la série de Fourier de f en un point t

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la série de Fourier partielle $S_n(t)$ en t par

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

Partie A – Calcul de la série de Fourier de f .

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.
2. Justifier que $a_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Montrer que $\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$, pour tout $n \geq 1$.
(b) Montrer que $b_n = \frac{1}{n}$, pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que la série de Fourier de f est convergente. On énoncera le théorème utilisé et on précisera la fonction vers laquelle elle converge.
5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

- (b) Calculer $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et en déduire la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.
6. Rappeler les hypothèses de l'identité de Parseval. Appliquer l'identité de Parseval à la fonction f et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
7. (a) On considère le pseudo-code suivant.

```
fonction f(n)
  S <- 0
  pour k de 1 à n faire
    S <- S + 1/(k*k)
  fin pour
  retourner S
fin fonction
```

Que vaut $f(3)$ (on écrira le résultat sous forme de fraction) ?

- (b) Écrire une fonction, nommée `approx`, en python ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel `eps` strictement positif, et renvoie le premier `n` pour lequel

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq \text{eps}.$$

Partie B – Extremum de S_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de 2π ;

$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de n ;

$\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des réels privé de $2\pi\mathbb{Z}$;

$\mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs privés de $n\mathbb{Z}$.

8. On note $S_n'(t)$ la dérivée de S_n au point t . Montrer que S_n est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $S_n'(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

9. (a) Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $\operatorname{Re}(z)$ la partie réelle de z . Justifier que

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right)$$

(b) Montrer que pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \operatorname{Re} \left(e^{i(n+1)\frac{t}{2}} \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)$$

(c) Montrer que pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\cos(\frac{(n+1)t}{2}) \sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

10. (a) Montrer que

$$\sin\left(\frac{nt}{2}\right) = 0 \iff t \in \left\{ \frac{2m\pi}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(b) Montrer que

$$\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) = 0 \iff t \in \left\{ \frac{\pi(2m+1)}{n+1} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(c) En déduire que l'ensemble des points qui annulent S_n' est :

$$\left\{ \frac{2m\pi}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi(2m+1)}{n+1} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

On appelle points critiques de S_n les points qui annulent sa dérivée. Autrement dit, t_0 est un point critique de S_n si $S_n'(t_0) = 0$.

11. Montrer que les points critiques de S_n appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont :

$$t_{1,m} = \frac{2m\pi}{n}, \text{ pour } m \in \mathbb{Z}, 1 \leq m \leq n-1,$$

$$t_{2,m} = \frac{\pi(2m+1)}{n+1}, \text{ pour } m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq n.$$

12. On suppose dans cette question seulement que $n = 3$. Montrer que l'ensemble des points critiques de S_3 dans $[0, 2\pi[$ sont

$$\left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

13. (a) On rappelle la formule de trigonométrie

$$2 \cos(B) \sin(A) = \sin(A + B) + \sin(A - B).$$

pour A et B deux réels. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n'(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t) - \sin(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on note :

$$S_n'(t) = \frac{N(t)}{D(t)}, \quad (1)$$

avec

$$N(t) = \sin((n + \frac{1}{2})t) - \sin(\frac{t}{2}) \quad (2)$$

et

$$D(t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right). \quad (3)$$

- (b) On note $S_n''(t)$ la dérivée seconde de S_n au point t . On admet que S_n est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Soit $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ un point critique de S_n . Montrer que

$$S_n''(t) = \frac{N'(t)}{D(t)}.$$

14. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $1 \leq m \leq n - 1$. On rappelle que $t_{1,m} = \frac{2m\pi}{n}$ est un point critique de S_n .

- (a) Montrer que

$$S_n''(t_{1,m}) = \frac{n \cos(\frac{m\pi}{n})}{2 \sin(\frac{m\pi}{n})}.$$

(on pourra utiliser le résultat de la question 6. (b)).

- (b) Montrer que $S_n''(t_{1,m}) > 0$ si $m < \frac{n}{2}$ et $S_n''(t_{1,m}) < 0$ si $m > \frac{n}{2}$.

- (c) En déduire la nature (maximum local ou minimum local) du point critique $t_{1,m}$ lorsque $m \neq \frac{n}{2}$.

15. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq m \leq n$. On rappelle que $t_{2,m} = \frac{\pi(2m+1)}{n+1}$ est un point critique de S_n .

- (a) Montrer que $(n + \frac{1}{2})t_{2,m} = \pi(2m+1) - \frac{\pi(2m+1)}{2(n+1)}$ puis que

$$\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t_{2,m}\right) = -\cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2(n+1)}\right).$$

(b) On rappelle que N est défini par l'équation (2). Montrer que

$$N'(t_{2,m}) = -(n+1) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2(n+1)}\right).$$

(c) Montrer que

$$S_n''(t_{2,m}) = -\frac{n+1}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2m+1)}{2(n+1)}\right)}.$$

(on pourra utiliser le résultat de la question 6. (b)).

(d) Montrer que $S_n''(t_{2,m}) < 0$ si $m < \frac{n}{2}$ et $S_n''(t_{2,m}) > 0$ si $m > \frac{n}{2}$.

(e) En déduire la nature (maximum local ou minimum local) des points critiques $t_{2,m}$ lorsque $m \neq \frac{n}{2}$.

Exercice 2

Partie A

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, nous cherchons à déterminer les valeurs propres de la matrice A .

(a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .

(b) Montrer que la matrice A admet deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 à déterminer, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Quelles sont les multiplicités de λ_1 et λ_2 ?

2. Dans cette question, nous allons étudier la diagonalisation de la matrice A .

(a) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_2 .

(b) Déterminer le sous-espaces propre associé à la valeur propre λ_1 et donner sa dimension.

(c) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

3. Dans cette question, on cherche à calculer A^n où n est un entier naturel.

(a) Montrer que $A = B - I$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer en justifiant l'utilisation de la formule du binôme de Newton que

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (-1)^{n-k} B^k.$$

(c) Calculer B^2 et démontrer que pour tout entier naturel k non nul, $B^k = 3^{k-1}B$.

(d) En déduire que pour tout entier naturel n non nul

$$A^n = (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \times (-1)^{n-k} \right) B.$$

- (e) Montrer en utilisant à nouveau la formule du binôme de Newton que pour tout entier naturel n non nul

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \times (-1)^{n-k} = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n).$$

- (f) En utilisant les questions précédentes montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix},$$

où a_n et b_n sont les termes généraux de deux suites à déterminer.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à calculer les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à 3 lignes et une colonne.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
- Donner une expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .
- Dans cette question, on suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur X_n et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = v_n = w_n = 2^n$.

Exercice 3

On considère un nombre complexe λ de module 1, avec $\lambda \neq 1$. On définit l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \lambda z, \end{aligned}$$

et la suite de nombres complexes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = f(z_n) = \lambda z_n, \quad z_0 \in \mathbb{C}^*.$$

Une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite périodique s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $w_{n+p} = w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un tel entier p est appelé une période de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie A – Étude de la transformation

- Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|f(z)| = |z|$.
- Résoudre l'équation $f(z) = z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

- On écrit $\lambda = e^{i\theta}$ sous la forme trigonométrique avec $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrire l'argument, modulo 2π , de $f(z)$ en fonction de l'argument de z .
- Quelle est l'image de la demi-droite $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0 \text{ et } \text{Re}(z) \geq 0\}$ par la fonction f ? Représenter cette image.

Partie B – Étude de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$z_n = \lambda^n z_0.$$

- En déduire que $|z_n| = |z_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, le point d'affixe z_n appartient au cercle de centre 0 et de rayon $|z_0|$.
- On suppose ici que $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.
 - Montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $\lambda^p = 1$.
 - Montrer que (z_n) est périodique.
- On suppose ici que $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas périodique (sauf si $z_0 = 0$).

Partie C – Application numérique

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note \mathbb{U}_N l'ensemble des racines N -ièmes de l'unité dans \mathbb{C} . Soit $z_0 = 1 + i$ et $\lambda \in \mathbb{U}_N$. On note, de plus, C_r le cercle centré en 0 de rayon $r > 0$.

- Déterminer le module r_0 de z_0 .
- Quelle est l'expression sous forme trigonométrique de λ ?
- Montrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique quel que soit $\lambda \in \mathbb{U}_N$ et déterminer une période.
- Montrer que $f(\mathbb{U}_N) = \mathbb{U}_N$ pour tout $\lambda \in \mathbb{U}_N$.
- Supposons maintenant que $\lambda = e^{2i\sqrt{2}\pi}$. La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle périodique?
- Soit $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Écrire un algorithme qui prend en entrée $\epsilon > 0$, $z \in C_{r_0}$ et affiche le plus petit entier n tel que $|z_n - z| < \epsilon$.

Exercice 4

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la convergence des suites de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, pour n un entier naturel non nul, de déterminer leur limite et de comparer leur vitesse de convergence.

Partie A – Étude de la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies, pour tout entier naturel n non nul, par

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

- Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 - Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- (c) En déduire que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
 (d) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ .
2. On se propose maintenant de déterminer cette limite ℓ .

On considère les suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \varphi_n = e \times \left(1 - \frac{f_n}{n!}\right).$$

- (a) Montrer que, pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{e} \leq e^{-t} \leq 1$.
 En déduire que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{e \times (n+1)} \leq f_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- (b) En déduire que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
3. (a) Calculer f_0 et φ_0 .
 (b) Soit n un entier naturel. Exprimer f_{n+1} en fonction de f_n .
 (c) En déduire une expression de φ_{n+1} en fonction de φ_n pour $n \in \mathbb{N}$.
 (d) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!}$.
 En déduire que les suites pour tout entier naturel non nul, $\varphi_n = a_n$.
 (e) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e .

Partie B – Étude de la convergence de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

On considère la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. En remarquant que pour tout entier naturel n non nul, $c_n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$, montrer que

$$c_n = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
2. En déduire que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Partie C – Étude de la vitesse de convergence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergeant vers α , ne prenant pas la valeur α , et telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1} - \alpha|}{|u_n - \alpha|} = \beta \quad \text{où } \beta \text{ est un nombre réel.}$$

On admet que β appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

La vitesse de convergence de (u_n) vers α est dite :

- lente si $\beta = 1$;
- de type géométrique si $0 < \beta < 1$;
- rapide si $\beta = 0$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{(n+1)!} \leq e - a_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}$.
 (b) En déduire la vitesse de convergence vers e de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. (a) À l'aide de la question 1 de la partie B, déterminer un équivalent de $c_n - e$ en $+\infty$.
 (b) En déduire la vitesse de convergence vers e de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.