Mathématiques - ATS -2014

Durée : 3 heures. - Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1. ATS–2014–Ex. 1

Correction par : Ismaël Souderes

Partie A

1. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. En utilisant la définition de f, on obtient alors :

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = e_4$$
$$f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = e_3$$
$$f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = e_2$$
$$f(e_4) = f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = e_1$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est obtenue en écrivant en colonne les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images des vecteurs de $\mathcal{B}$. L'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ viennent d'être calculées. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = A$$

2. Par définion le polynôme caractéristique s'obtient en calculant le déterminant $\det(A - XI_4)$. On calcule donc :

$$P_A(X) = \det(A - XI_4) = \begin{vmatrix}-X & 0 & 0 & 1\\0 & -X & 1 & 0\\0 & 1 & -X & 0\\1 & 0 & 0 & -X\end{vmatrix}$$
$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 - XL_1}{=} \begin{vmatrix}-X & 0 & 0 & 1\\0 & -X & 1 & 0\\0 & 1 & -X & 0\\1 - X^2 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

en développant sur la dernière colone on a :

$$P_A(X) = \det(A - XI_4) = -\begin{vmatrix}0 & -X & 1\\0 & 1 & -X\\1 - X^2 & 0 & 0\end{vmatrix}$$
$$=^{dvp.\ col.\ 1} -(1 - X^2)\begin{vmatrix}-X & 1\\1 & -X\end{vmatrix}$$
$$= -(1 - X^2)(X^2 - 1) = (X^2 - 1)^2$$

On en déduit que

$$P_A(X) = (X - 1)^2(X + 1)^2$$

3. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique P_A de A. D'après la question précédente, $P_A(X) = (X-1)^2(X+1)^2$ et admet donc exactement deux racines doubles : -1 et 1.

   La matrice A admet donc deux valeurs propres, toutes deux de multiplicité 2 :
$$\lambda = -1 \qquad \text{et} \qquad \mu = 1\ .$$

4. Il s'agit de déterminer une base de l'espace propre $E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(f + id\,)$ et d'exprimer cette base en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

   Soit $v \in E_{-1}$. On note ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ par $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   La propriété $v \in E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(f + id\,)$ est équivalente à $(f + id\,)(v) = 0$, soit dans la base $\mathcal{B}$
$$(A + I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

   Il s,agit donc de résoudre le système linéaire
$$\left\{\begin{array}{ll} x + t & = 0 \\ y + z & = 0 \\ y + z & = 0 \\ x + t & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} t & = -x \\ z & = -y \end{array}\right.$$

   Ainsi v s'ecrit nécessairement en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:
$$v = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   pour x, y réels.

   Les vecteurs v_1 et v_2 dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendant (ils ne sont pas colinéaires) et forment une base de $E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(f + id\,)$.

5. Il s'agit de déterminer une base de l'espace propre $E_1 = \mathrm{Ker}\,(f - id\,)$ et d'exprimer cette base en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

   Soit $v \in E_1$. On note ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ par $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   La propriété $v \in E_1 = \mathrm{Ker}\,(f - id\,)$ est équivalente à $(f - id\,)(v) = 0$, soit dans la base $\mathcal{B}$
$$(A - I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

   Il s,agit donc de résoudre le système linéaire
$$\left\{\begin{array}{ll} -x + t & = 0 \\ -y + z & = 0 \\ y - z & = 0 \\ x - t & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} t & = x \\ z & = y \end{array}\right.$$

   Ainsi v s'ecrit nécessairement en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:
$$v = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour x, y réels.

Les vecteurs v_3 et v_4 dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $V_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $V_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendant (ils ne sont pas colinéaires) et forment une base de $E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(f + id\,)$.

6. D'après la question 4) la dimension de l'espace propre E_{-1} est 2 comme la murtiplicité de la valeur propre $\lambda = -1$. De même, la question 5) assure que la dimension de l'espace propre E_1 est 2 comme la murtiplicité de la valeur propre $\lambda = 1$.

   Chaque espace propre ayant une dimension égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante, on en déduit que l'endomorphisme f est diagonalisable et donc que la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable.

7. La famille de vecteurs $(v_1, v_2, v_3 v_4)$ est libre car c'est la concaténation de deux familles libres, (v_1, v_2) et (v_3, v_4), de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes : v_1 et v_2 sont associés à $\lambda = -1$ et v_3 et v_4 sont associés à $\mu = 1$.

   Ainsi la famille $(v_1, v_2, v_3 v_4)$ est libre à 4 éléments dans E de dimension 4 (l'énoncé rappelle que $\mathcal{B}$ qui est une famille de 4 éléments est une base de E).

   On en déduit que la famille $(v_1, v_2, v_3 v_4)$ est une base de E.

   Les vecteurs v_1, v_2 étant des vecteurs propres de valeur propre $\lambda = -1$ et les vecteurs v_3, v_4 étant des vecteurs propres de valeurs propre $\mu = 1$ on a

$$\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3,v_4)}(f) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   En notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base (v_1, v_2, v_3, v_4), on a

$$P = P_{\mathcal{B}\longrightarrow(v_1,v_2,v_3,v_4)} = \mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3,v_4),\mathcal{B}}(id\,) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

   qui est inversible par construction.

   La relation

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}\longrightarrow(v_1,v_2,v_3,v_4)}\,\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3,v_4)}(f)P^{-1}_{\mathcal{B}\longrightarrow(v_1,v_2,v_3,v_4)}$$

   donne

$$A = PDP^{-1}$$

Partie B

1. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. En utilisant la définition de f, on obtient alors :

$$g(e_1) = f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = e_4$$

$$g(e_2) = f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = e_3$$

$$g(e_3) = f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = e_2$$

$$g(e_4) = f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0$$

La matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est obtenue en écrivant en colonne les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images des vecteurs de $\mathcal{B}$. L'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ viennent d'être calculées. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

2. Par définion le polynôme caractéristique s'obtient en calculant le déterminant $\det(A - XI_4)$. On calcule donc :

$$\begin{aligned} P_B(X) = \det(B - XI_4) &= \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} \\ &=^{dvp.\ li.\ 1} -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} \\ &=^{dvp.\ col.\ 3} X^2 \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} \\ &= X^2(X^2 - 1) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P_B(X) = X^2(X-1)(X+1)$$

3. Les valeurs propres de B sont les racines du polynôme caractéristique P_B de B. D'après la question précédente, $P_B(X) = X^2(X-1)(X+1)$ et admet donc exactement trois racines : -1, 0 et 1 ; la racine 0 étant de multiplicité 2, les deux autres de multiplicité 1.

   La matrice B admet donc 3 valeurs propres, :

$$\alpha = -1, \qquad 0\,, \qquad \text{et} \qquad \beta = 1\,,$$

   α et β sont de multiplicité 1 tandis que 0 est une valeur propre de multiplicité 2.

4. Il s'agit de déterminer une base de l'espace propre $E_0 = \mathrm{Ker}\,(g)$ et d'exprimer cette base en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

   Soit $v \in E_0$. On note ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ par $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right)$.

   La propriété $v \in E_0 = \mathrm{Ker}\,(g)$ est équivalente à $f(v) = 0$, soit dans la base $\mathcal{B}$

$$(B) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

   Il s'agit donc de résoudre le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & = 0 \\ z & = 0 \\ y & = 0 \\ x & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} z & = 0 \\ y & = 0 \\ x & = 0 \end{array} \right.$$

   Ainsi v s'ecrit nécessairement en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$v = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour t réel.

Le vecteurs v_0 dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_0 = \mathrm{Ker}\,(g)$.

5. On considère la valeur propre $\alpha = -1$.

   Il s'agit de déterminer une base de l'espace propre $E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(g + id\,)$ et d'exprimer cette base en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

   Soit $v \in E_{-1}$. On note ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ par $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   La propriété $v \in E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(g + id\,)$ est équivalente à $(g + id\,)(v) = 0$, soit dans la base $\mathcal{B}$

$$(B + I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   Il s'agit donc de résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x & = 0 \\ y + z & = 0 \\ y + z & = 0 \\ x + t & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ t & = -x = 0 \\ z & = -y \end{cases}$$

   Ainsi v_{-1} s'ecrit nécessairement en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$V_{-1} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   pour y réel.

   Le vecteur $v_\alpha = v_{-1}$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $V_\alpha = V_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(g + id\,)$.

6. On considère la valeur propre $\beta = 1$.

   Il s'agit de déterminer une base de l'espace propre $E_\beta = E_1 = \mathrm{Ker}\,(g - id\,)$ et d'exprimer cette base en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

   Soit $v \in E_1$. On note ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ par $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   La propriété $v \in E_1 = \mathrm{Ker}\,(g - id\,)$ est équivalente à $(g - id\,)(v) = 0$, soit dans la base $\mathcal{B}$

$$(B - I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   Il s,agit donc de résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} -x & = 0 \\ -y + z & = 0 \\ y - z & = 0 \\ x - t & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ t & = x = 0 \\ z & = y \end{cases}$$

Ainsi v s'ecrit nécessairement en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$v = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour y réel.

Le vecteur $v_\beta = v_1$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $V_\beta = V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_1 = E_\beta = \text{Ker}\,(g - id\,)$.

7. D'après la question 4, l'espace propre $E_0 = \text{Ker}\,(g)$ associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 alors que la multiplicitée de la valeur propre est 2. On en déduit que l'endomorphisme g et donc la matrice B **ne sont pas** diagonalisable.

8. **Rédaction 1 :** La famille de vecteur $\mathcal{B}_2$ ayant 4 éléments dans E de dimension 4 (la famille $\mathcal{B}$ posséde 4 éléments et est une base de E d'après l'énoncé)

   Il suffit donc de montrer que la famille $\mathcal{B}_2$ est libre. Soit a, b, c et d des réels tels que

$$av_0 + be_1 + cv_\alpha + dv_\beta = 0.$$

   Montrons que : $a = b = c = d = 0$.

   Dans la base $\mathcal{B}$ la relation $av_0 + be_1 + cv_\alpha + dv_\beta = 0$ se traduit par :

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c+d \\ -c+d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que $a = b = 0$ ainsi que les deux équations $c + d = 0$ et $c - d = 0$.

   On a ainsi nécessairement $c = 0$ puis $d = 0$ et donc $a = b = c = d = 0$.

   La famille $\mathcal{B}_2$ est donc une famille libre à 4 élément de E de dimension 4. C'est donc une base de E.

   Rédaction 2 : En notant (e_1, e_2, e_3, e_4) les vecteurs de la famille $\mathcal{B}$, on remarque que $v_\alpha = e_2 - e_3$ et que $v_\beta = e_2 + e_3$.

   De là $\text{Vect}\,(v_\alpha, v_\beta) = \text{Vect}\,(e_2, e_3)$. Comme $v_0 = e_4$ on a

$$\text{Vect}\,(v_0, v_\alpha, v_\beta) = \text{Vect}\,(e_2, e_3, e_4)$$

   puis

$$\text{Vect}\,(v_0, e_1, v_\alpha, v_\beta) = \text{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4).$$

   On en déduit que la famille $\mathcal{B}_2$ est génératrice à 4 éléments de E de dimension 4 (on a déjà expliqué pourquoi). Cette famille est donc une base de E.

9. D'après les questions précédentes, on a déjà .

$$g(v_0) = g(e_4) = 0, \quad g(v_\alpha) = g(v_{-1}) = -v_\alpha, \quad g(v_\beta) = g(v_1) = v_\beta.$$

   D'après la première question de la partie B on a :

$$g(e_1) = e_4 = v_0$$

   en vertue de la question B.4.

10. Ainsi, on obtient la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_2$ en écrivant en colone les coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ des image des vecteurs de $\mathcal{B}_2$ calculée plus haut. On a donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

ATS–2014–Ex. 2

Correction par : I. Souderes

1. (a) Par définition de la valeur absolue, f est paire sur $]-\pi, \pi[$. Par 2π-périodicité, on a que $f(-\pi) = f(\pi)$. On en déduit que f est paire sur $[-\pi, \pi]$ qui est un intervalle symétrique, centré sur 0. Par 2π-périodicité, f est donc paire sur $\mathbb{R}$.

   (b) On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de f qui est 2π-périodique et continue par morceau sur $\mathbb{R}$: pour tout entier $n \geqslant 1$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \text{ et } b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

et $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

D'après la question précédente, f est paire sur $\mathbb{R}$, donc $b_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Calculons maitenant a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

où la première égalité est du à la parité de f.

Calculons ensuite a_n pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est paire} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{I.P.P}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t && \text{car } \sin(n\pi) = 0 \\
&= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2}
\end{aligned}$$

Da là, on en déduit que pour tout entier pair $n = 2p$ $(p \geqslant 1)$ on a

$$a_n = a_{2p} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{2p} - 1}{(2p)^2} = 0,$$

et que pour tout entier impair $n = 2p+1$ ($p \geqslant 0$) on a

$$a_n = a_{2p+1} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{2p+1}-1}{(2p+1)^2} = \frac{-4}{\pi(2p+1)^2}.$$

Ainsi en tenant compte de la nullité des b_n et de la moitié des coefficients a_n, la série de Fourier de f s'écrit pour tout x réel :

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2}.$$

2. (a) La fonction valeur absolue est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]-\pi,\pi]$. Par 2π-périodicité, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
La théorème de Dirichlet assure que la série de Fourier de f converge en chaque point réel x vers la régularisée de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2} = \tilde{f}(x)$$

où $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\longrightarrow x^-} f(t) + \lim_{t\longrightarrow x^+} f(t)\right)$.
On sait de plus que

$$f(-\pi) = \lim_{x\longrightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\pi^+} -x = \pi = \lim_{x\longrightarrow \pi^-} x = \lim_{x\longrightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi).$$

Ainsi f est continue sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la régularisée de f est égale à f elle-même et donc d'après le théorème de Dirichlet que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2} = f(x).$$

(b) On a montré lors de la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2} = f(x).$$

En appliquant ce résultat à $x=0$ on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Sf(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)0\Big)}{(2p+1)^2} = f(0) = 0.$$

Et donc, commme $\cos(0) = 1$,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2};$$

c'est-à-dire après multiplication par $\frac{\pi}{4}$

$$T = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. En décomposant la somme définissant f selon les termes pairs et impairs, on obtient

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + T. \end{aligned}$$

On a donc

$$S = \frac{1}{4} S + T$$

4. D'après la question précédente, on a :

$$S = \frac{1}{4} S + T$$

et donc

$$\frac{3}{4} S = T = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en conclue que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

5. La fonction f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $]-\pi, \pi]$

Avec les notations de la question 1.b. le théorème de Parceval assure que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Comme $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et par nullité des b_n et des a_{2p}, on déduit de $a_{2p+1} = \frac{-4}{\pi(2p+1)^2}$ pour $p \geqslant 0$ que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Calculons maintenant l'intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t && \text{par parité de } f \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} t^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

On en déduit que

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

et donc

$$V = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

6. (a) Comme lors de la question 4. on décompose la somme définissant U selon la parité de termes pour obtenir

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16}U + V.$$

(b) On a montré à la question précédente que :

$$U = \frac{1}{16}U + V$$

et donc, en utilisant la question 5., que

$$\frac{15}{16}U = V = \frac{\pi^4}{96}.$$

On en déduit que

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\,\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. (a) La fonction g est impair sur $]-\pi,\pi[$ car $x \longmapsto x$ l'est. La fonction g n'est cependant pas impair sur $\mathbb{R}$ car par 2π-périodicité

$$g(-\pi) = g(\pi) = \pi \neq -\pi = -g(\pi).$$

(b) On note ici $a_n(g)$ et $b_n(g)$ les coefficients de Fourier de g. L'imparité de g sur $]-\pi,\pi[$ suffit a obtenir la nullité des coefficients $a_n(g)$ pour $n \geqslant 0$. En effet :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\pi}^{0} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et par le changement de variable $u = -t$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \int_{\pi}^{0} -u\cos(nu)(-1)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

De là, il suffit de calculer les coefficients $b_n(g)$. En utilisant à nouveau l'imparité de $x \longmapsto x$ sur $]-\pi,\pi[$, on obtient pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}b_n(g) &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0} \pi t\sin(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{-\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-(-1)^n\pi}{n} + \left[\frac{-\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-(-1)^n\pi}{n}\right)\\ &= \frac{-2(-1)^n}{n}\end{aligned}$$

On en déduit la série de Fourier de g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Sg(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2(-1)^n \sin(nx)}{n} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n}.$$

8. La fonction $x \longmapsto x$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi,\pi]$. On en déduit que par 2π-périodicité, la fonction g est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

   Le théorème de Dirichlet assure que la série de Fourier de g converge ponctuellement vers la régularisée de g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Sg(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} = \tilde{g}(x)$$

   où $\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t \longrightarrow x^-} g(t) + \lim\limits_{t \longrightarrow x^+} g(t)\right)$.

   On notera particulièrement le cas de $x = (2p+1)\pi$ où la fonction g n'étant pas continue, on a $g(x) \neq \tilde{g}(x)$. Par 2π-périodicité et continuité de g sur $]-\pi,\pi[$ se sont les seuls points de discontinuité de g et donc les seuls points où $\tilde{g}$ diffère de g.

   On calcule uniquement la régularisé pour $x = \pi$: Par 2π-périodicité,

$$\lim_{t \longrightarrow \pi^+} g(t) = \lim_{t \longrightarrow -\pi^+} g(t)$$

   et donc

$$\tilde{g}(\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \longrightarrow \pi^-} g(t) + \lim_{t \longrightarrow \pi^+} g(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \longrightarrow \pi^-} g(t) + \lim_{t \longrightarrow -\pi^+} g(t)\right) = \frac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$$

9. En $x = \frac{\pi}{2}$ la fonction g est continue car sur $]-\pi,\pi[$, $g(x) = x$.

   De là, en notant comme précédemment $\tilde{g}$ la régularisée de g, on a $\tilde{g}(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. La question précédente assure alors que :

$$Sg\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(\frac{n\pi}{2})}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

   Pour un entier pair $n = 2p$, on a

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2p\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0.$$

   Et pour un entier impair $n = 2p+1$ on a

$$(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{2p+1} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = -(-1)^p.$$

   On peut ainsi simplifier l'expression de $Sg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et trouver

$$\frac{\pi}{2} = Sg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}.$$

   En divisant par 2, on en déduit que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$$

10. La fonction g est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \longmapsto x$ est continue sur $]-\pi,\pi]$

Avec les notations de la question 7.b. le théorème de Parceval assure que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t = a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(g)^2+b_n(g)^2).$$

Comme $a_0=\frac{\pi}{2}$ et par nullité des a_n , on déduit de $b_n=\frac{-2(-1)^n}{n}$ que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Calculons maintenant l'intégrale :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= \frac{\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S.$$

Ce qui est bien le résultat trouvé à la question 3.

11. On sait d'une part que pour tout $x\in[0,\pi[$:

$$f(x)=|x|=x=g(x).$$

Par ailleurs la question 2.a assure que $Sf(x)$ la série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$ (f est $\mathcal{C}^1$ par morceau sur R et continue en $x\in[0,\pi[$ et donc égal à sa régularisée sur cette intervalle ; le théorème de Dirichlet s'applique donc). On a alors

$$\forall x\in[0,\pi[,\qquad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2}.$$

De même, toujours pour $x\in[0,\pi[$, la question 8. assure que $Sg(x)$ la série de Fourier de g en x converge vers $g(x)$. On a donc :

$$\forall x\in[0,\pi[,\qquad g(x)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n}.$$

Pour $x\in[0,\pi[$, en remplaçant les deux expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ ci-dessus dans la relation $f(x)=g(x)$, on obtient

$$\forall x\in[0,\pi[,\qquad \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2}=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n}.$$

Ce qui est bien la relation cherchée.

12. Comme pour x dans $]-\pi,0]$ on a $f(x)=|x|=-x=-g(x)$' et que pour x dans $]0,\pi]$ on a $f(x)=|x|=x=g(x)$ on en déduit par 2π-périodicité que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad h(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}.$$

13. D'après la question précédente, on sait que $h = \frac{1}{2}(f+g)$. Or le calcul des coefficients de Fourier et des séries de Fourier est linéaire. On en déduit en notant Sh la série de Fourier de h que pour tout réel x :

$$\begin{aligned} Sh(x) &= \frac{1}{2}\Big(Sf(x) + Sg(x)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n}\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2}\right); \end{aligned}$$

et donc d'après les questions 7.b et 1.b :

$$Sh(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2\cos\Big((2p+1)x\Big)}{\pi(2p+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n}$$

Exercice 3. ATS–2014–Ex. 3

Correction par : I. Souderes

1. Sur $]0\,;+\infty[$, L'équation (H) est équivalente à

$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = 0$$

Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est . $A(x) = \ln(x)$.

De là, les solutions de l'équation homogène (H) sur $]0\,;+\infty[$ sont de la forme

$$y_0(x) = Ke^{A(x)} = Kx, \qquad K \in \mathbb{R}$$

2. Les solutions de l'équation (E) sur $]0\,;+\infty[$ sont de la forme

$$y = y_p + y_0$$

où y_p est une solution particulière de (E) et y_0 une solution de l'équation homogène (H).

Il s'agit donc de déterminer une solution particulière y_p de (E). On procède à l'aide de la méthode de la variation de la constante en cherchant y_p sous la forme

$$y_p = Ky_0$$

où pour $x \in]0\,;+\infty[$, $y_0(x) = x$ est une solution de l'équation homogène (H) et K étant une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ à déterminer.

Pour que y_p soit solution de (E), la fonction K doit vérifier :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad x(K'(x)y_0(x) + K(x)y_0'(x)) - K(x)y_0(x) = \arctan(x).$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad xK'(x)y_0(x) + K(x)(xy_0'(x) - y_0(x)) = \arctan(x)$$

et donc

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad xK'(x)y_0(x) = x^2K'(x) = \arctan(x).$$

Finalement, la fonction k doit vérifier

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad K'(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2}$$

et K est une primitive de $x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$; une telle primitive est donnée (pour tout $x \in]0\,;+\infty[$) par l'intégrale

$$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

si elle existe.

La fonction $u \longmapsto \dfrac{\arctan(u)}{u^2}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ et est donc intégrable sur tout segment inclu dans $]0\,;+\infty[$.

De plus, pour tout $u \in]0\,;+\infty[$ on a

$$\left|\frac{\arctan(u)}{u^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{u^2}.$$

Le membre de droite étant intégrable en $+\infty$ car $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ ($\alpha = 2 > 1$), on en déduit par comparaison des intégrales des fonctions positives que l'intégrale

$$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

est bien définie.

3. Soit $x \in]0\,;+\infty[$ et $b > x$. Une intégration par partie de l'intégrale (finie) associée à $K(x)$ où l'on dérive $\arctan(x)$ et où l'on dérive $\frac{1}{x^2}$ donne :

$$-\int_x^b \frac{\arctan(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\arctan(u)}{u}\right]_x^b - \int_x^b \frac{1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u$$
$$\frac{\arctan(b)}{b} - \frac{\arctan(x)}{x} - \int_x^b \frac{1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u$$

Comme la fonction arctangente est bornée par $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, on en déduit que

$$\lim_{b \longrightarrow +\infty} \frac{\arctan(b)}{b} = 0$$

Par ailleurs, l'intégrale $-\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u$ est bien définie car $\dfrac{1}{u(u^2+1)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{u^3}$ dont l'intégrale est unt intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ ($\alpha = 3 > 1$).

On peut donc conclure que pour $x \in]0\,;+\infty[$:

$$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{\arctan(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u$$

4. Comme le polynôme u^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ de degré 2, la décomposition en éléments simple de $\dfrac{1}{u(u^2+1)}$ donne l'exsistence de trois réels tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta u + \gamma}{u^2+1}.$$

En multipliant chaque membre de l'égalité par u puis en faisant tendre u vers 0, on obtient $\alpha = 1$.

De même en faisant tendre u vers $+\infty$ (après multiplication par u), on obtient $\alpha + \beta = 0$ et donc $\beta = -1$. En mettant enfin au même dénominateur, on trouve $\gamma = 0$. De là, on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}.$$

5. En reprenant les questions 2, 3 et 4 on commence par calculer $K(x)$ pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
K(x) &= -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u && \text{quest. 2}\\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u && \text{quest. 3}\\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u && \text{quest. 4}\\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenu en remarqant que

$$-\int_x^b \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u = -\ln(b) + \frac{1}{2}\ln(1+b^2) + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

et que comme $\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b} \sim_\infty 1$, on a :

$$-\ln(b) + \frac{1}{2}\ln(1+b^2) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\right) \xrightarrow[b\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Ainsi, en revenant à la question 2, une solution particulière de l'équation (E) sur $]0\,;+\infty[$ est donnée par

$$y_p(x) = xK(x) = -\arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2).$$

Les solutions de l'équation (E) sur $]0\,;+\infty[$ sont donc de la forme :

$$y(x) = y_O + y_p(x) = Kx - \arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2), \quad K \in \mathbb{R}.$$

où y_0 désigne une solution de l'équation homogène (H) associée à (E) et déterminée à la question 1.

Remarque : Étant donnée l'allure de la solution particulière trouvée, une vérification s'impose.

En dérivant y_p on trouve pour $x > 0$:

$$y_p'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \ln(x) + 1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2},$$

puis

$$\begin{aligned}
xy_p'(x) &= -\frac{x}{1+x^2} + x\ln(x) + x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \frac{x^3}{1+x^2}\\
&= \frac{-x + x(1+x^2) + x^3}{1+x^2} + x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2)\\
&= x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2).
\end{aligned}$$

Comme

$$y_p(x) = -\arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2).$$

on a bien

$$xy_p'(x) - y_p(x) = \arctan(x).$$

6. Soit y une solution générale de l'équation (E). On a donc $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0, \qquad y(x) = Kx - \arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2).$$

Lorsque $x \longrightarrow 0^+$, on a d'une part :

$$Kx - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} 0;$$

d'autre part, part croissance comparée

$$x\ln(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} 0;$$

Enfin $\arctan(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} 0$. On en déduit donc que y admet une limite en 0^+ donnée par :

$$y(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$$

Exercice 4.

ATS–2014–Ex. 4

Correction par : Ismaël Souderes

1. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule simplement :

$$\begin{aligned} x(-\alpha) &= (-\alpha) - \sin(-\alpha) = -\alpha + \sin(\alpha) = -x(\alpha) \\ y(-\alpha) &= 1 - \cos(-\alpha) = 1 - \cos(\alpha) = y(\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi la fonction x est impaire et la fonction y paire. La courbe **C** est symétrique par rapport à l'axe $(\mathbf{O}y)$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule ici :

$$\begin{aligned} x(2\pi - \alpha) &= (2\pi - \alpha) - \sin(2\pi - \alpha) = 2\pi - \alpha - \sin(\alpha) = 2\pi - x(\alpha) \\ y(2\pi - \alpha) &= 1 - \cos(2\pi - \alpha) = 1 - \cos(\alpha) = y(\alpha) \end{aligned}$$

De là le milieu du segment $[\mathbf{M}(\alpha), \mathbf{M}(2\pi - \alpha)]$ a pour coordonées

$$\left(\frac{x(\alpha) + x(2\pi - \alpha)}{2}, \frac{y(\alpha) + y(2\pi - \alpha)}{2}\right) = (\pi, y(\alpha))$$

Ainsi la courbe **C** est symétrique par rapport à la droite $x = \pi$.

(c) Par 2π-périodicité des fonction cos et sin on a pour tout réel α

$$x(\alpha + 2\pi) = 2\pi + x(\alpha) \quad \text{et} \quad y(\alpha + 2\pi) = y(\alpha).$$

On en déduit que pour tout réel α

$$\overrightarrow{\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{M}(\alpha + 2\pi)} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

La courbe **C** est donc invariante par translation de vecteur

$$2k\pi\vec{i} = \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Les questions ont montré que la courbe admet pour axes de symétries les droites $x = 0$ et $x = \pi$ et est invariante par translation de vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

2. (a) Calculons les dérivées des fonctions x et y (sommme de fonctions usuelles). Pour $\alpha \in [0, 2\pi]$, on a

$$x'(\alpha) = 1 - \cos(\alpha)$$
$$y'(\alpha) = \sin(\alpha).$$

Ainsi pour $\alpha \in [0, 2\pi]$:

$$y'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$$

et

$$x'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{0, 2\pi\}.$$

Les valeurs et le comportement des fonctions cos et sin, accompagné d'un calcul simple des valeurs de x et y aux points spéciaux permettent de dresser le tableau de variation suivant :

α	0		π		2π
Signe de x'	0	$+$	2	$+$	0
Variation de x	0	$\nearrow$		$\nearrow$	2π
Variation de y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0
Signe de y'	0	$+$	0	$-$	0

La fonction x admet donc un minimum 0 en $\alpha = 0$ et un maximum en $\alpha = 2\pi$ tandis que la fonction y admet un minimum 0 pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2\pi$ et un maximum valant 2 pour $\alpha = \pi$.

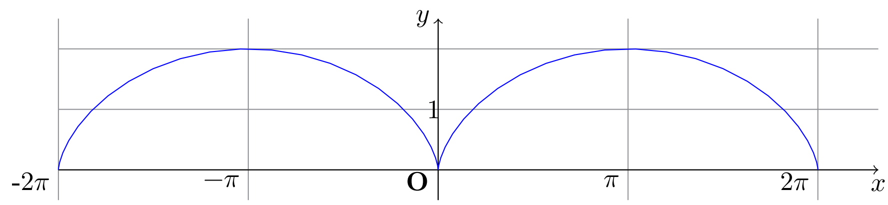
(b) On cherche un équivalent de $\dfrac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$:

$$\frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\alpha - \sin(\alpha)} = \frac{1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \mathrm{o}(\alpha^3)\right)}{\alpha - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \mathrm{o}(\alpha^3)\right)} \sim_{0^+} \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{6}{\alpha^3} \sim_{0^+} \frac{3}{\alpha}.$$

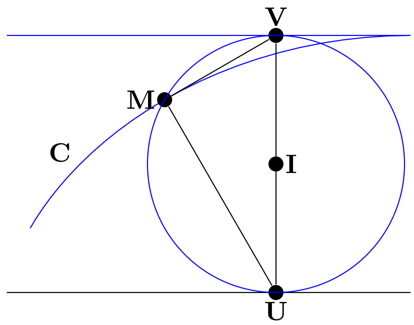
On en déduit que

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} = +\infty$$

(c)



3. (a)



Soit $\alpha \in]0,\pi[$. D'après la question 2.b, le vecteur $\begin{pmatrix} x'(\alpha) \\ y'(\alpha) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirige donc la tangente en **M** ; on peut prendre

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} x'(\alpha) \\ y'(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ 1-\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

est dont normal à $\vec{t}$ et dirige la normal à **C** en **M**.

(b) Le vecteur $\vec{t}$ est normal à **N** et donc pour $P(x,y)$ sur **N** on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \vec{t}; \vec{MP} \right\rangle \\ &= (1-\cos(\alpha))(x-\alpha+\sin(\alpha)) + \sin(\alpha)(y-1+\cos(\alpha)) \\ &= x(1-\cos(\alpha)) - \alpha(1-\cos(\alpha)) + \sin(\alpha)(1-\cos(\alpha)) + \sin(\alpha)y + \sin(\alpha)(-1+\cos(\alpha)) \\ &= x(1-\cos(\alpha)) + \sin(\alpha)y - \alpha(1-\cos(\alpha)) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de la normal à la courbe **C** au point de paramètre α est :

$$\mathbf{N} : \qquad x(1-\cos(\alpha)) + \sin(\alpha)y - \alpha(1-\cos(\alpha)) = 0.$$

Le point d'intersection de **N** avec l'axe des abscisses est donné pour le point d'ordonnée $y = 0$ satisfaisant

$$x(1-\cos(\alpha)) - \alpha(1-\cos(\alpha)) = 0$$

c'est à dire, comme $1-\cos(\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, par

$$x = \alpha.$$

Le point **U** cherché a pour coordonnées $\mathbf{U}(\alpha, 0)$.

(c) Le vecteur $\vec{n}$ est normal à **T** et donc pour $P(x,y)$ sur **T** on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \vec{n}; \vec{MP} \right\rangle \\ &= -\sin(\alpha)(x-\alpha+\sin(\alpha)) + (1-\cos(\alpha))(y-1+\cos(\alpha)) \\ &= -x\sin(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) - \sin(\alpha)^2 + (1-\cos(\alpha))y - 1 - \cos(\alpha)^2 + 2\cos(\alpha) \\ &= -x\sin(\alpha) + (1-\cos(\alpha))y - 2 + 2\cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe **C** au point de paramètre α est :

$$\mathbf{T} : \qquad -x\sin(\alpha) + (1-\cos(\alpha))y - 2 + 2\cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) = 0.$$

Le point d'intersection de **T** avec la droite d'équation est donné pour le point d'ordonnée $y = 2$ satisfaisant

$$-x\sin(\alpha) + (1-\cos(\alpha))y - 2 + 2\cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) = -x\sin(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) = 0$$

c'est à dire, comme $\sin(\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, par

$$x = \alpha.$$

Le point **V** cherché a pour coordonnées $\mathbf{V}(\alpha, 2)$.

(d) Les abscisses de **U** et **V** sont toutes deux égales à α :

$$\mathbf{U}(\alpha, 0), \qquad \mathbf{V}(\alpha, 2).$$

4. (a) Comme on a d'aprés les questions 3.b et 3.c que

$$\mathbf{U}(\alpha, 0), \qquad \mathbf{V}(\alpha, 2),$$

On en déduit que les coordonnée de **I** sont

$$\mathbf{I}(\alpha, 1).$$

On s'intéresse maitenant au vecteur $\overrightarrow{\mathbf{IM}}$ et à sa norme, la longeur **IM**. Comme $\mathbf{M}(\alpha - \sin(\alpha), 1 - \cos(\alpha))$, on en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{IM}}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{IM}} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$||\overrightarrow{\mathbf{IM}}|| = \mathbf{IM} = \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1.$$

Par ailleurs $\mathbf{IU} = \mathbf{IV} = 1$ et les trois points **U**, **V** et **M** sont sur le cercle de centre **I** et de rayon 1.

(b) On a calculé à la question précédente les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{IM}}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{IM}} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{\mathbf{IU}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$, on en déduit que

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{IU}}; \overrightarrow{\mathbf{IM}} \right\rangle = \cos(\alpha).$$

En notant θ la mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{\mathbf{IU}}, \overrightarrow{\mathbf{IM}}}$ on a aussi :

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{IU}}; \overrightarrow{\mathbf{IM}} \right\rangle = ||\overrightarrow{\mathbf{IU}}|| \cdot ||\overrightarrow{\mathbf{IM}}|| \cos(\theta) = \cos(\theta).$$

car $||\overrightarrow{\mathbf{IU}}|| = ||\overrightarrow{\mathbf{IM}}|| = 1$.

On en déduit donc que $\cos(\theta) = \cos(\alpha)$ puis que $\theta = \alpha$ car $\alpha \in]0, \pi[$.

(c) On a tout d'abord clairement $\mathbf{OU} = \alpha$ car $\mathbf{U}(\alpha, 0)$.

La longeur de l'arc du cercle de rayon r et prenant un angle θ est donné par θr. Ici l'angle est d'après la question précédente donné par α et le rayon vaut 1 d'après la question 4.a. donc

$$\overset{\frown}{\mathbf{UM}} = 1\alpha = \alpha = \mathbf{OU}.$$