Mathématiques - ATS - 2013

Durée : 3 heures. - Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1. ATS–2013–Ex. 1

Correction par : I. Souderes

1. L'ensemble $\mathcal{E}$ est un sous ensemble de l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 3 $M_3(\mathbb{R})$. Plus précisément, $\mathcal{E}$ est par définition l'espace vectoriel engendré par les matrices $\mathbf{K}$ et $\mathbf{I}$:
$$\mathcal{E} = \text{Vect}\,(\mathbf{K}, \mathbf{I}).$$
Aisni $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (de dimension inférieur ou égal à 2). La famille $(\mathbf{K}, \mathbf{I})$ est génératrice de $\mathcal{E}$.
Montrons que cette famille est une famille libre. Soit deux réels λ et μ tel que
$$\lambda\mathbf{K} + \mu I = 0.$$
Il s'agit de montrer que λ et μ sont nuls.
L'équation précédente donne donc :
$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & a\lambda \\ 0 & \mu & 0 \\ \lambda b & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
De là, on obtient
$$\mu = 0, \quad a\lambda = 0, \quad b\lambda = 0.$$
et donc $\lambda = \mu = 0$ car $a > 0$. Ainsi la famille $(\mathbf{K}, \mathbf{I})$ est libre et, d'après le début de la réponse, génératrice de $\mathcal{E}$. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est donc de dimension 2.

2. Pour déterminer les valeurs propres de $\mathbf{K}$, cherchons les racines du polynôme caratéristique de $\mathbf{K}$:
$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{K}) &= \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 0 & -X & 0 \\ b & 0 & -X \end{vmatrix} \\ &= -X \begin{vmatrix} -X & a \\ b & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 - ab) \\ &= -X(X - \sqrt{ab})(X + \sqrt{ab}) \qquad \text{car } a, b > 0 \end{aligned}$$
Ainsi, Les racines de $\chi(\mathbf{K})$ et donc les valeurs propres de $\mathbf{K}$ sont $\lambda_1 = -\sqrt{ab}$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = \sqrt{ab}$.

3. La matrice $\mathbf{K}$ carrée de taille 3 admet 3 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

4. (a) Pour $\lambda_1 = -\sqrt{ab}$ déterminons l'espace propre $\mathcal{U}_1$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_1 = \text{Ker}\,(\mathbf{K} + \sqrt{ab}\mathbf{I})$. On a alors
$$(\mathbf{K} + \sqrt{ab}\mathbf{I})X = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{ab}x + az = 0 \\ \sqrt{ab}y = 0 \\ bx + \sqrt{ab}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{ab}x + az = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x \\ y = 0 \end{cases}$$

car a est strictement positif. Ainsi, avec $u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \\ -\sqrt{b} \end{pmatrix}$, on a

$$\mathcal{U}_1 = \mathrm{Vect}\,(u_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \\ -\sqrt{b} \end{pmatrix}\right)$$

(b) Pour $\lambda_2 = 0$ déterminons l'espace propre $\mathcal{U}_2$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2 = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{K})$. On a alors

$$(\mathbf{K})X = 0 \iff \begin{cases} az = 0 \\ 0 = 0 \\ bx = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

car a et b sont strictement positifs. Ainsi, avec $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\mathcal{U}_2 = \mathrm{Vect}\,(u_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c) Pour $\lambda_3 = \sqrt{ab}$ déterminons l'espace propre $\mathcal{U}_3$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2 = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{K} - \sqrt{ab}\mathbf{I})$. On a alors

$$(\mathbf{K} + \sqrt{ab}\mathbf{I})X = 0 \iff \begin{cases} -\sqrt{ab}x + az = 0 \\ -\sqrt{ab}y = 0 \\ bx - \sqrt{ab}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{ab}x + az = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x \\ y = 0 \end{cases}$$

car a est strictement positif. Ainsi avec $u_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}$ on a

$$\mathcal{U}_3 = \mathrm{Vect}\,(u_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}\right)$$

5. D'après la question 3, la matrice $\mathbf{K}$ est diagonalisable. La question 4(a-b-c) donne trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes et formant une famille libre. La famille (u_1, u_2, u_3) libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est donc une base de vecteur propres de $\mathbf{K}$.

En notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3), on a

$$\mathbf{P} = \mathrm{P}_{can \longrightarrow (u_1,u_2,u_3)} = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3),can}(id) = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & \sqrt{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{b} & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}$$

et par la formule du changement de base

$$\mathbf{K} = \mathbf{PDP}^{-1}$$

où $\mathbf{D}$ est la matrice dans la base (u_1, u_2, u_3) associée à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canonique $X \mapsto \mathbf{K}X$:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{ab} \end{pmatrix}.$$

6. Soit $i \in \{1,2,3\}$ et X_i un vecteur propre de $\mathbf{K}$ associé à la valeur propre λ_i. On calcule :

$$\mathbf{M}X_i = (\alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I})X_i = \alpha\mathbf{K}X_i + \beta\mathbf{I}X_i == \alpha(\lambda_i X_i) + \beta X_i.$$

Ainsi X_i qui est non nul car vecteur propre de $\mathbf{K}$ vérifie

$$\mathbf{M}X_i = (\lambda_i\alpha + \beta)X_i$$

et est donc vecteur propre de $\mathbf{M}$ associé à la valeur propre

$$\mu_i = \lambda_i\alpha + \beta.$$

7. (a) Nous avons montré à la question 5 que les vecteurs u_1, u_2 et u_3 de la question 4 (a-b-c) forment une base de vecteurs propres de $\mathbf{K}$. D'après la question précédente ce sont aussi des vecteurs propre de $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$. $\mathbf{M}$ admet donc une base de vecteurs propres : (u_1, u_2, u_3). La matrice $\mathbf{M}$ est donc diagonalisble dans la base (u_1, u_2, u_3) et est semblable à

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha + \beta & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\alpha + \beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Ainsi avec $\lambda_1 = -\sqrt{ab}$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = \sqrt{ab}$ on trouve

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{ab} + \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\sqrt{ab} + \beta \end{pmatrix}$$

(b) Comme expliqué à la question précédente, une base de diagonalisation de $\mathbf{M}$ est donné par la base (u_1, u_2, u_3) diagonalisant $\mathbf{K}$. La matrice $\mathbf{P}$ de la question 5 étant la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base (u_1, u_2, u_3), on a bien

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$$

ou comme à la question 5

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & \sqrt{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{b} & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}$$

8. En posant $a = 1$ et $b = 1$ on a $\mathbf{A} = \mathbf{K} + \mathbf{I}$ où

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant les résultats des question 6 et 7 à la matrice $\mathbf{A}$ ($\alpha = 1$, $\beta = 1$) on trouve

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

car $\lambda_1\alpha + \beta = -1 + 1 = 0$ et $\lambda_3\alpha + \beta = 1 + 1 = 2$.

9. Tout d'abord, une récurence évidente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \mathbf{Q}\Delta^n\mathbf{Q}^{-1}$$

où $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Ensuite, on remarque que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

On calcule donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^n &= \mathbf{Q}\Delta^n\mathbf{Q}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 2.

ATS–2013–Ex. 2

Correction par : I. Souderes

Partie 1

1. On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$

2. La fonction $t \longmapsto t^p e^{int}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc intégrable sur $[0\,;\pi]$. Pour $p = 0$ on a en particulier :

$$\begin{aligned}
I_{0,n} &= \int_0^\pi t^0 e^{int}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi e^{int}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{int}}{in}\right]_0^\pi \\
&= \frac{e^{in\pi}-1}{in} && \text{car } e^{i0} = 1 \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{in} && \text{d'après la question 1} \\
&= \frac{-i\left((-1)^n - 1\right)}{n}
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que

$$I_{0,n} = \frac{-i\left((-1)^n - 1\right)}{n}$$

3. Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Un calcul direct par une intégration par partie effectuée en dérivant t^p donne :

$$\begin{aligned}
I_{p,n} &= \int_0^\pi t^p e^{int}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[t^p \frac{e^{int}}{in}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{pt^{p-1}e^{int}}{in}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^p(-1)^n}{in} - \frac{p}{in}\int_0^\pi t^{p-1}e^{int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-i(-1)^{n\,p}}{\pi} n + \frac{ip}{n} I_{p-1,n} \\
&= \frac{i(-1)^{n+1}\pi^p}{n} + \frac{ip}{n} I_{p-1,n}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat demandé.

4. (a) Calculons dans un premier temps $I_{1,n}$. En utilisant la relation de récurrence démontrée précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{1,n} &= \frac{i(-1)^{n+1}\pi^1}{n} + \frac{i}{n} I_{0,n} \\
&= \frac{i(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{i}{n}\,\frac{-i\left((-1)^n - 1\right)}{n} && \text{d'après la question 2} \\
&= \frac{i(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{\left((-1)^n - 1\right)}{n^2} \\
&= \frac{\left((-1)^n - 1\right)}{n^2} + i\,\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $t \in \mathbb{R}$ on a $e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$ et donc :

$$C_{1,n} = \int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \Re e\Big(\int_0^\pi te^{int}\,\mathrm{d}t\Big) = \Re e(I_{1,n}).$$

On en déduit, en vertue des calculs précédents, que :

$$C_{1,n} = \Re e\left(\frac{\left((-1)^n - 1\right)}{n^2} + i\,\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}\right) = \frac{\left((-1)^n - 1\right)}{n^2}.$$

De même on a

$$S_{1,n} = \Im m(I_{1,n}) = \Im m\left(\frac{\left((-1)^n - 1\right)}{n^2} + i\,\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

(b) On raisonne comme à la question précédente. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
I_{2,n} &= \frac{i(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2i}{n} I_{1,n} && \text{d'après la question 3} \\
&= \frac{i(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2i}{n}\left(\frac{\left((-1)^n - 1\right)}{n^2} + i\,\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}\right) && \text{d'après la question 4.a} \\
&= \frac{i(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2i\left((-1)^n - 1\right)}{n^3} - \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n^2} \\
&= \frac{2(-1)^n\pi}{n^2} + i\left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^3} - \frac{(-1)^n\pi^2}{n}\right).
\end{aligned}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, la décomposition $e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$ donne :

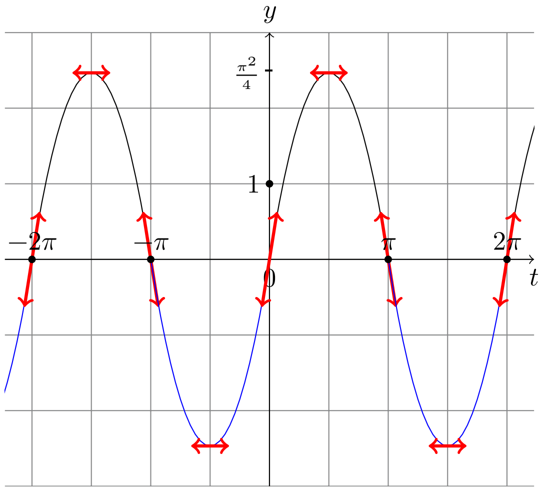
$$C_{2,n} = \Re e\left(I_{2,n}\right) = \frac{2(-1)^n\pi}{n^2}$$

et

$$S_{2,n} = \Im m(I_{2,n}) = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^3} - \frac{(-1)^n\pi^2}{n}.$$

Partie II

5.



6. La fonction f est 2π périodique et continue sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier. On note a_0, a_n et b_n ($n \geqslant 1$) les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique f.

   La fonction f étant impaire, les coefficients a_0 et a_n sont nuls pour $n \geqslant 1$.

   Il s'agit donc de calculer les coefficients b_n. Soit $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est impaire} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi t - t^2)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi S_{1,n} - S_{2,n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les résultats des questions 4a et 4b, on obtient :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\pi S_{1,n} - S_{2,n}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} - \left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^3} - \frac{(-1)^n\pi^2}{n}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^3}\right) \\ &= -\frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^3}. \end{aligned}$$

De là, si n est pair, $n = 2k$ alors

$$b_n = b_{2k} = -\frac{4\left((-1)^{2k} - 1\right)}{\pi(2k)^3} = 0.$$

Pour n impair, c'est-à-dire pour $n = 2k+1$ avec $k \geqslant 0$ on a :

$$b_n = b_{2k+1} = -\frac{4\left((-1)^{2k+1} - 1\right)}{\pi(2k+1)^3} = \frac{8}{\pi(2k+1)^3}.$$

Ainsi la série de Fourier de f qui s'écrit en général pour $t \in \mathbb{R}$

$$Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right),$$

s'écrit d'après les calculs précédents :

$$Sf(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nt) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin\Big((2k+1)t\Big).$$

7. La fonction f est polynômiale sur $[0\,;\pi]$ donc $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Par 2π-périodicité, f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

   On a vu que la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$ et donc continue sur cet intervalle. Comme $f(0) = 0$ et que f est impaire, elle est continue sur $[-\pi\,;\pi]$. Par ailleurs, $f(-\pi) = -f(\pi) = -(\pi\,\pi - \pi^2) = 0$. Cela ainsi que la continuité sur $[-\pi\,;\pi]$ assure que l'extension de f sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

   La fonction f est donc égale à sa régularisée $\tilde{f}$.

   Comme f est 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ le théorème de Dirichlet assure que la série de Fourrier de f en $t \in \mathbb{R}$ converge vers $\tilde{f}(t) = f(t)$ (par continuité de f). Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Sf(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin\Big((2k+1)t\Big) = f(t);$$

   en particulier sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ on trouve :

$$\forall t \in [0;\pi], \qquad Sf(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin\Big((2k+1)t\Big) = f(t) = \pi t - t^2.$$

8. **Théorème de Parceval :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Soit a_0, a_n et b_n ($n \geqslant 1$) ses coefficients de Fourier.

Les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et en notant $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ on a

$$a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ on remplacera dans l'énoncé ci-dessus les carrés $(\ )^2$ par des valeurs absolues au carré : $|\ |^2$

9. D'après l'énoncé, f est 2π-périodique ($T = 2\pi$). On a déjà remarqué que f est continue par morceau sur $\mathbb{R}$ (on a montré qu'elle en même continue sur $\mathbb{R}$).

   Ainsi d'après le théorème de Parceval et en utilisant la parité de f^2 (f est impaire) :

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

   D'après les question précédente tous les coefficients a_n (dont a_0) sont nuls ainsi que les coefficients b_n pour n pair. On a donc

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\right)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{32}{\pi^2(2k+1)^6} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi t - t^2)^2\,\mathrm{d}t$$

   Calculons dans un premier temps $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi t - t^2)^2\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi t - t^2)^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 t^2 - 2\pi t^3 + t^4)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2 t^3}{3} - \frac{2\pi t^4}{4} + \frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5}\right)\\ &= \frac{\pi^4}{30}.\end{aligned}$$

   Ainsi la relation de Parceval donne

$$\frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^4}{30}$$

   et donc

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

10. En décomposant la somme T sur les termes d'indice pairs et impairs on trouve :

$$\begin{aligned}T &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^6} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}\\ &= \frac{1}{64}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k)^6} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}\\ &= \frac{1}{64}T + S.\end{aligned}$$

On en déduit que $T(1-\dfrac{1}{64}) = S$ et donc

$$T = \frac{64}{63}S = \frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960} = \frac{1}{63}\frac{\pi^2}{15} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice 3.

ATS–2013–Ex. 3

Correction par : I. Souderes

1. Soit $t \in \,]-\pi\,;\pi\,]$. On a d'après la parité de cos et l'imparité de sin :

$$x(-t) = \cos(t)^3 = x(t), \quad \text{et} \quad y(t) = (-\sin(t))^3 = -y(t).$$

Ainsi la courbe est symétrique par rapport à l'axe $(x'x) = O + \mathbb{R}\vec{i}$. On étudie la courbe seulement sur $[\,0\,;\pi\,]$.

De plus, on a $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$ donc

$$x(\pi - t) = -\cos(t)^3 = -x(t), \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = \sin(t)^3 = y(t).$$

Ainsi la courbe est symétrique par rapport à l'axe $(y'y) = O + \mathbb{R}\vec{j}$. On étudie la courbe seulement sur $[\,0\,;\pi/2\,]$.

Enfin, on a $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$ donc

$$x(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)^3 = y(t), \quad \text{et} \quad y(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)^3 = x(t).$$

Ainsi la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = y$. On étudie la courbe seulement sur $[\,0\,;\pi/4\,]$.

2. Les fonctions x et y sont dérivables (sur $\mathbb{R}$) car puissances des fonctions trigonométriques (qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On a

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right], \quad x'(t) = -3\sin(t)\cos(t)^2$$
$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right], \quad y'(t) = 3\cos(t)\sin(t)^2.$$

De plus, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ on sait que $1 \geqslant \cos(t) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $0 \leqslant \sin(t) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\sin(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. On en déduit le tableau de variation conjoint

t	0		$\frac{\pi}{4}$
Signe de x'	0	$-$	$\frac{-3\sqrt{2}}{4}$
Variation de x	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
Variation de y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
Signe de y'	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

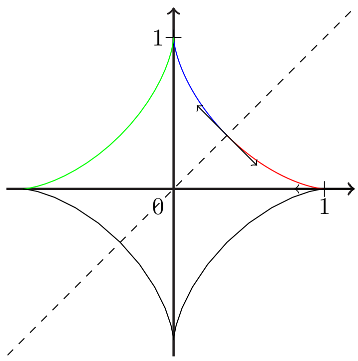
Le point de paramètre $t = 0$ étant un point critique, on cherche à déterminer la limite de $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$ lorsque t tend vers 0 afin de déterminer le coefficient directeur de la tangente au point de paramètre $t = 0$. On a :

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{\sin(t)^3}{1 - \cos(t)^3} = \frac{t^3 + \mathrm{o}(t^3)}{1 - (1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2))^3}$$

$$= \frac{t^3 + \mathrm{o}(t^3)}{\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)} \sim_{t \longrightarrow 0} \frac{t^3}{t^2/2} = 2t \underset{t \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

La courbe $\mathcal{C}_0$ admet donc une tangente horizontale au point $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. La tangente à $\mathcal{C}_0$ au point de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ est porté par le vecteur $(x'(\pi/4), y'(\pi/4))$ et donc par le vecteur $(-1, 1)$

On obtient donc la courbe $\mathcal{C}_0$ (en rouge) puis en appliquant les symétrie de la question 1 la courbe $\mathcal{C}$:



3. Soit $t \in \left]-\pi ; \pi\right]$. On suppose dans un premier temps que le point $\Big(x(t), y(t)\Big)$ associé n'est pas un point critique : $t \notin \{-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi\}$.

On a montré lors de la question précédente que

$$x'(t) = -3\sin(t)\cos(t)^2 \quad \text{et} \quad y'(t) = 3\cos(t)\sin(t)^2.$$

Lorsque $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce vecteur porte la tangente à $\mathcal{C}$ et comme

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = 3\sin(t)\cos(t)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ porte la tangente à $\mathcal{C}$ lorsque $t \notin \{-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi\}$.

Pour ces valeurs particulières où la courbe admet un point critique, on se ramène grâce aux symétries de la courbe au cas où $t = 0$.

On a vu qu'en ce point la courbe admet une tangente horizontale qui est bien portée par le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix}$.

On peut donc conclure que pour tout $t \in]-\pi\,;\pi]$ la tangente est portée par le vecteur

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et est normale au vecteur

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

L'équation cartésienne de la tangente T est donc de la forme

$$X\sin(t) + Y\cos(t) = c$$

pour un certain réel c. Avec $X = \cos(t)^3$ et $Y = \sin(t)^3$, on trouve en factorisant par $\sin(t)\cos(t)$:

$$\cos(t)^3\sin(t) + \sin(t)^3\cos(t) = \sin(t)\cos(t)\Big(\cos(t)^2 + \sin(t)^2\Big) = \sin(t)\cos(t).$$

Ainsi, l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en $M(t) = (x(t), y(t))$ est :

$$X\sin(t) + Y\cos(t) = \sin(t)\cos(t).$$

4. Soit $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et notons $(x_A(t), y_A(t))$ les coordonnées du point $A(t)$ et $(x_B(t), y_B(t))$ celles du point $B(t)$. Comme ces deux points sont sur la tangente T, leurs coordonnées vérifient l'équation trouvée à la question précédente :

$$x_A(t)\sin(t) + y_A(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t) \text{ et } x_B(t)\sin(t) + y_B(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t).$$

Par ailleurs, comme $A(t)$ est sur l'axe $(x'x)$, on a $x_A(t) = 0$ et donc

$$x_A(t)\sin(t) = \sin(t)\cos(t) \iff x_A(t) = \cos(t)$$

car $\sin(t) > 0$ pour tout $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

De même, $B(t)$ étant sur l'axe $(y'y)$ et comme $\cos(t) > 0$ pour $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on trouve $x_B(t) = 0$ et

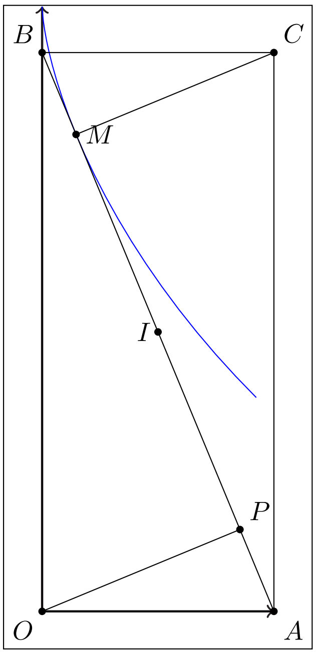
$$y_B(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t) \iff y_B(t) = \sin(t).$$

On adonc montré que

$$A(t) = (\cos(t), 0), \qquad B(t) = (0, \sin(t))$$

et comme $\overrightarrow{A(t)B(t)} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ on en déduit que la distance $A(t)B(t)$ vaut :

$$A(t)B(t) = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$



5.
6.
7.
8.

Question 5 :

Soit $t \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$. Par construction, les coordonnées de $C(t)$ sont $(\cos(t), \sin(t))$. On note $R = (x_R(t), y_R(t))$ le projeté orthogonal de C sur (AB), c'est-à-dire sur la tangente T. Le projeté R est sur la droite normale à T passant par C. Cette droite à pour équation

$$-X\cos(t) + Y\sin(t) = -\cos(t)^2 + \sin(t)^2$$

car elle est normale au vecteur $\vec{t} = \left(\begin{smallmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right)$.

Par ailleurs le projeté R appartient à la tangente qui a pour équation :

$$X\sin(t) + Y\cos(t) = \sin(t)\cos(t).$$

En notant simplement $x_R = x_R(t)$ et $y_R = y_R(t)$, on détermine les coordonnées de R en résolvant le système :

$$\begin{cases} -x_R\cos(t) + y_R\sin(t) = -\cos(t)^2 + \sin(t)^2 \\ x_R\sin(t) + y_R\cos(t) = \sin(t)\cos(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_R\Big(\sin(t)^2 + \cos(t)^2\Big) = \sin(t)^3 & \scriptstyle \sin(t)L_1 + \cos(t)L_2 \\ x_R\Big(\sin(t)^2 + \cos(t)^2\Big) = \cos(t)^3 & \scriptstyle -\cos(t)L_1 + \sin(t)L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_R = \sin(t)^3 \\ x_R = \cos(t)^3. \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de R sont les même que celles de M donc $R = M$.

Question 6 :

On raisonne comme précédemment. On note $(x_P(t), y_P(t))$ ou simplement (x_P, y_P) les coordonnées de P le projeté orthogonal de O sur la droite (AB), c'est-à-dire sur la tangente T.

Les coordonnées (x_p, y_p) vérifie le système

$$\begin{cases} -x_p\cos(t) + y_P\sin(t) = 0 \\ x_P\sin(t) + y_P\cos(t) = \sin(t)\cos(t) \end{cases} \quad ;$$

la première équation étant celle de la droite normale à $T = (AB)$ passant par O. Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} y_P\Big(\cos(t)^2 + \sin(t)^2\Big) = \sin(t)\cos(t)^2 \\ x_P\Big(\cos(t)^2 + \sin(t)^2\Big) = \sin(t)^2\cos(t) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} y_P = \sin(t)\cos(t)^2 \\ x_P = \sin(t)^2\cos(t) \end{cases}.$$

Ainsi $P(\cos(t)\sin(t)^2, \cos(t)^2\sin(t))$

Le milieu du segment $[MP]$ a pour abscisse

$$x_I = \frac{1}{2}(\cos(t)^3 + \cos(t)\sin(t)^2) = \frac{\cos(t)}{2}(\cos(t)^2 + \sin(t)^2) = \frac{\cos(t)}{2}$$

et pour ordonnée

$$y_I = \frac{1}{2}(\sin(t)^3 + \cos(t)^2\sin(t)) = \frac{\sin(t)}{2}(\sin(t)^2 + \cos(t)^2) = \frac{\sin(t)}{2}.$$

Par ailleurs le centre du rectange $OACB$ est le milieu du segment $[OC]$. Comme C a pour coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$, les coordonnées du centre de ce rectangle sont

$$(\frac{\cos(t)}{2}), \frac{\sin(t)}{2}) = (x_I, y_I).$$

Ainsi, I est bien le centre du rectangle $OACB$ et le milieu de $[MP]$. **Question 7 :** Pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$P(t) = (\cos(t)\sin(t)^2, \cos(t)^2\sin(t)).$$

De là, $P(0) = (0,0)$ et $P(\frac{\pi}{2}) = (0,0)$ car $\sin(0) = 0$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Enfin comme $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on a :

$$P(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Il s'agit maintenant d'obtenir les vecteurs tangents à $\mathcal{Q}$ aux points de paramètres $t = 0, \pi/4, \pi/2$.

Les fonction X et Y sont dérivables (en fait $\mathcal{C}^\infty$ car produit de fonctions usuelles)Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$X'(t) = -\sin(t)^3 + 2\cos(t)^2\sin(t) \quad \text{et} \quad Y'(t) = -2\cos(t)\sin(t)^2 + \cos(t)^3.$$

Les valeurs particulière du cosinus et du sinus assurent que le vecteur dérivé aux points de paramètres spécifiques vaut :

$$\begin{pmatrix} X'(0) \\ Y'(O) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} X'(\frac{\pi}{4}) \\ Y'(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} X'(\frac{\pi}{2}) \\ Y'(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 8 : Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t)^2 \\ \cos(t)^2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$OA^2 = ||\overrightarrow{OA}||^2 = \cos(t)^2$$

et

$$\begin{aligned} OP^2 = ||\overrightarrow{OP}||^2 &= \cos(t)^2\sin(t)^4 + \cos(t)^4\sin(t)^2 \\ &= \cos(t)^2\sin(t)^2(\sin(t)^2 + \cos(t)^2) \\ &= \cos(t)^2\sin(t)^2. \end{aligned}$$

De là, on calcule le produit scalaire de deux façons en notant θ l'angle $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}}$:

$$\left\langle \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OP} \right\rangle = \cos(t)^2 \sin(t)^2$$

et

$$\left\langle \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OP} \right\rangle = ||\overrightarrow{OA}||||\overrightarrow{OP}|| \cos(\theta) = \cos(t)^2 \sin(t) \cos(\theta)$$

car pour $t \in \left[\, 0\,; \frac{\pi}{2} \,\right]$ on a $\cos(t) \geqslant 0$ et $\sin(t) \geqslant 0$.

On en déduit après simplification pour $t \neq 0, \frac{\pi}{2}$ que

$$\cos(\theta) = \sin(t)$$

c'est-à-dire que

$$\theta = \frac{\pi}{2} - t$$

car $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$ et que l'on sait que $t \in \left]\, 0\,; \frac{\pi}{2} \,\right[$.

Cette relation reste vraie lorsque $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$ par convention.

9. On a déjà remarqué à la question précédente que

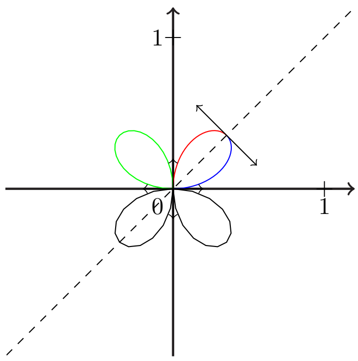
$$OP^2 = ||\overrightarrow{OP}||^2 = \cos(t)^2 \sin(t)^2.$$

Donc, comme $\cos(t) \geqslant 0$, $\sin(t) \geqslant 0$ pour $t \in \left[\, 0\,; \frac{\pi}{2} \,\right]$, on a

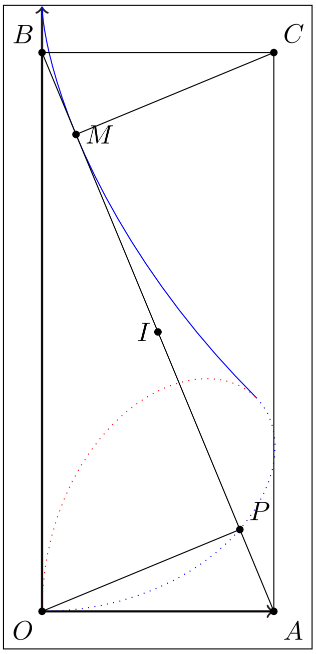
$$\begin{aligned} OP = ||\overrightarrow{OP}|| &= \cos(t)\sin(t) \\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ &= \sin(\theta)\cos(\theta). \end{aligned}$$

Ainsi l'équation polaire de la courbe $\mathcal{Q}_0$ est :

$$r = \cos(\theta)\sin(\theta)$$



10.


B
C
M
I
P
O
A