Concours ATS 2007 - Corrigé

Exercice 1

1. La fonction f_k est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k'(x) = \dfrac{1}{(x+k\pi)^2+1} > 0$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_k'(x) \leqslant \underbrace{\dfrac{1}{k^2\pi^2+1}}_{\delta_k} < 1$.

2. ★ La fonction g_k est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g_k'(x) = f_k'(x) - 1 \leqslant \delta_k - 1 < 0$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$g_k'(x)$	0	$-$	
$g_k(x)$	$\operatorname{Arctan} k\pi$	$\searrow$	$-\infty$

★ $g_k(0) = \operatorname{Arctan} k\pi > 0$ car $k\pi > 0$.
$g_k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)}_{\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[} - \dfrac{\pi}{2} < 0$.

De plus, g_k étant continue et strictement décroissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, il existe donc un unique réel $\theta_k \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ solution de l'équation $\theta_k = f_k(\theta_k)$.

3.a. Supposons que $\forall n > 0$, $u_{n-1} \neq \theta_k$. f_k est continue sur $[u_{n-1}; \theta_k]$, dérivable sur $]u_{n-1}; \theta_k[$. De plus, pour tout $x \in]u_{n-1}; \theta_k[$, $|f_k'(x)| \leqslant \delta_k$.
On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis : $\left|\dfrac{f_k(\theta_k) - f_k(u_{n-1})}{\theta_k - u_{n-1}}\right| \leqslant \delta_k$
d'où : $0 \leqslant \theta_k - u_n \leqslant \delta_k(\theta_k - u_{n-1})$.
S'il existe un n_0 tel que $u_{n_0} = \theta_k$, l'inégalité reste vraie pour tous les $n \geqslant n_0$ car la suite est stationnaire à partir de ce rang n_0.

3.b. S'il existe un n_0 tel que $u_{n_0} = \theta_k$, la suite $(u_n)_n$ est stationnaire à partie du rang n_0 donc le résultat est évident. Supposons maintenant que $\forall n > 0$, $u_{n-1} \neq \theta_k$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \dfrac{\theta_k - u_i}{\theta_k - u_{i-1}} \leqslant \delta_k^n$ donc
$0 \leqslant \theta_k - u_n \leqslant \underbrace{\delta_k^n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \times \underbrace{(\theta_k - u_0)}_{fixe}$ car $0 < \delta_k < 1$.
0n a donc : $\theta_k - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \theta_k$.

3.c. D'après les inégalités précédentes, on a : $\forall n > 0$, $0 \leqslant \theta_1 - u_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{1+\pi^2}\right)^n$. On veut que $\theta_1 - u_n < 10^{-15}$ donc il suffit que $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{1+\pi^2}\right)^n < 10^{-15}$. On a donc en passant au log : $n > \dfrac{15 + \log\frac{\pi}{2}}{\log(1+\pi^2)} \geqslant 15$. Donc à partir de $n = 15$, $\theta_1 - u_n < 10^{-15}$.

4. Sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction f_k est strictement croissante et on a $f_k(0) = \operatorname{Arctan} k\pi$, $f_k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

et $f_k(\theta_k) = \theta_k$. Donc, $\forall k > 0$, on a : $\underbrace{\operatorname{Arctan} k\pi}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}} \leqslant \theta_k \leqslant \underbrace{\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}}$. Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \theta_k = \dfrac{\pi}{2}$.

5. ★ $\forall x > 0$, $\left(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}\right)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \dfrac{-1}{x^2} = 0$. Donc la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. En $x = 1$, elle vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Donc $\forall x > 0$, $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$.

★ D'après l'inégalité obtenue au **4.**, on a (en la multipliant par -1 et en ajoutant $\dfrac{\pi}{2}$) :
$\underbrace{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)}_{=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)} \leqslant \underbrace{\dfrac{\pi}{2} - \theta_k}_{=\tau_k} \leqslant \underbrace{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} k\pi}_{=\operatorname{Arctan}\frac{1}{k\pi}}$ d'après l'égalité précédente

6. Lorsque $k \to +\infty$, $\dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)}{\operatorname{Arctan}\frac{1}{k\pi}} \sim \dfrac{\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}}{\frac{1}{k\pi}} = \dfrac{k}{k+\frac{1}{2}}$ qui tend vers 1.
Donc τ_k est équivalent lorsque $k \to +\infty$ à $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{k\pi} \sim \dfrac{1}{k\pi}$. Finalement : $\tau_k \sim_{+\infty} \dfrac{1}{k\pi}$.

Exercice 2

I.1. Pour tout x, $P_N(x) = \det(xI - N) = \begin{vmatrix} x & 0 & -q \\ -1 & x & -p \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - px - q$.

I.2. x_0 est racine double de $P(x)$, donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-x_0)^2 Q(x)$ avec $Q(x_0) \neq 0$.
On a donc : $P'(x) = (x - x_0)[2Q(x) + (x - x_0)Q'(x)]$ donc x_0 est aussi racine du polynôme dérivé $P'(x)$.

I.3. α est racine double de $P_N(x)$ donc vérifie, d'après les deux questions précédentes, le système :
$\begin{cases} 3\alpha^2 - p = 0 \\ \alpha^3 - p\alpha - q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3\alpha^2 \\ q = -2\alpha^3 \end{cases}$
α racine double de $P_N(x)$ implique donc que $4p^3 = 108\alpha^6 = 27q^2$.

I.4. Le couple $(p, q) = (0; 0)$ vérifie la relation (R) mais l'énoncé sous-entendait p et q strictement positifs. Si $q = 1$, l'équation $p^3 = \dfrac{27}{4}$ n'a pas de solution entière. Si $q = 2$, l'équation $p^3 = 27$ admet une unique solution $p = 3$. Donc les plus petits entiers positifs p et q vérifiant (R) forment le couple $(3; 2)$.

II.1. D'après **I.1**, $P_N(x) = x^3 - 3x - 2$.

II.2. $P_N(x) = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$. Les racines de $P_N(x)$ sont donc $\lambda_1 = -1$ (double) et $\lambda_2 = 2$ (simple).

II.3. Pour tous $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = -x \\ x + 3z = -y \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$.

Donc une base de E_1 est constituée par l'unique vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

II.4. Pour tous $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 2x \\ x + 3z = 2y \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$.

Donc une base de E_2 est constituée par l'unique vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

II.5. E_1 et E_2 sont de dimension 1 car leur base est constituée d'un unique vecteur non nul. La dimension du sous-espace propre E_1 n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre λ_1. Donc la matrice N n'est pas diagonalisable.

II.6.a. On a : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ donc $P = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

II.6.b. *Remarque : les calculs très classiques sont laissés au lecteur.*
★ $\det(xI - P) = x^2(x-1)$. P a donc 2 valeurs propres : 0 (double) et 1 (simple).
★ Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est un plan d'équation $x + 2y + 4z = 0$ dont une base est formée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
★ Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est une droite vectorielle dont une base est formée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

II.6.c. On a : $P^2 = \dfrac{1}{81}M^4 = \dfrac{1}{81}\begin{pmatrix} 9 & 18 & 36 \\ 18 & 36 & 72 \\ 9 & 18 & 36 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}M^2 = P$. Donc P est la matrice d'une projection.

II.6.d. ★ Le noyau de P est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 donc le plan vectoriel d'équation $x + 2y + 4z = 0$.
★ Comme P est la matrice d'une projection, le sous-espace image de P est le supplémentaire de $\ker P$ donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \dfrac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} = \dfrac{\sinh \pi}{\pi}$.

2. ★ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+in}e^{x(1+in)}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{x(1+in)}$.
★ $d_n = a_n + ib_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(1+in)}dt = \dfrac{1}{1+in} \times \dfrac{e^{\pi(1+in)} - e^{-\pi(1+in)}}{\pi} = \dfrac{1-in}{1+n^2} \times (-1)^n \times \dfrac{2\sinh\pi}{\pi}$.
Donc $d_n = 2 \times \dfrac{1-in}{1+n^2} \times (-1)^n \times a_0$.
En séparant partie réelle et partie imaginaire, on a donc : $a_n = \dfrac{(-1)^n}{1+n^2} \times 2a_0$ et $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2} \times 2a_0$.

3. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Donc sa série de Fourier converge simplement vers la régularisée $\widetilde{f}$ de f.
En particulier, $\forall x \in]-\pi;\pi[$, $S(x) = f(x)$.
De plus, $S(\pi) = \widetilde{f}(\pi) = \dfrac{\lim_{t\to\pi_-} f(t) + \lim_{t\to\pi_+} f(t)}{2} = \dfrac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh\pi$.

On a également : $S(\pi) = a_0 + 2a_0 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(n\pi) + \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2} \sin(n\pi) \right) = a_0 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \right)$.

4. D'après la question précédente, on a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\pi \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} - 1 \right)$.

5. La fonction f étant continue par morceaux, on peut appliquer l'égalité de Parseval qui nous donne :
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t} dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \times 4a_0^2 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \sinh 2\pi}{2 \sinh^2 \pi} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\pi \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} - 1 \right)$.

Exercice 4

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Donc $\mathcal{L}$ est symétrique par rapport à O.

2. $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t)$. Donc $\mathcal{L}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Les deux égalités précédentes permettent de réduire l'intervalle d'étude à $[-1;1] - \{0\}$. L'égalité trouvée à la question **1.** permet de le réduire encore à $[0;1]$.

3. $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = \frac{2t^2(3-t^4)}{(t^4+1)^2}$ et $y'(t) = \frac{2(1-3t^4)}{(t^4+1)^2}$.
On a donc le tableau de variations suivant :

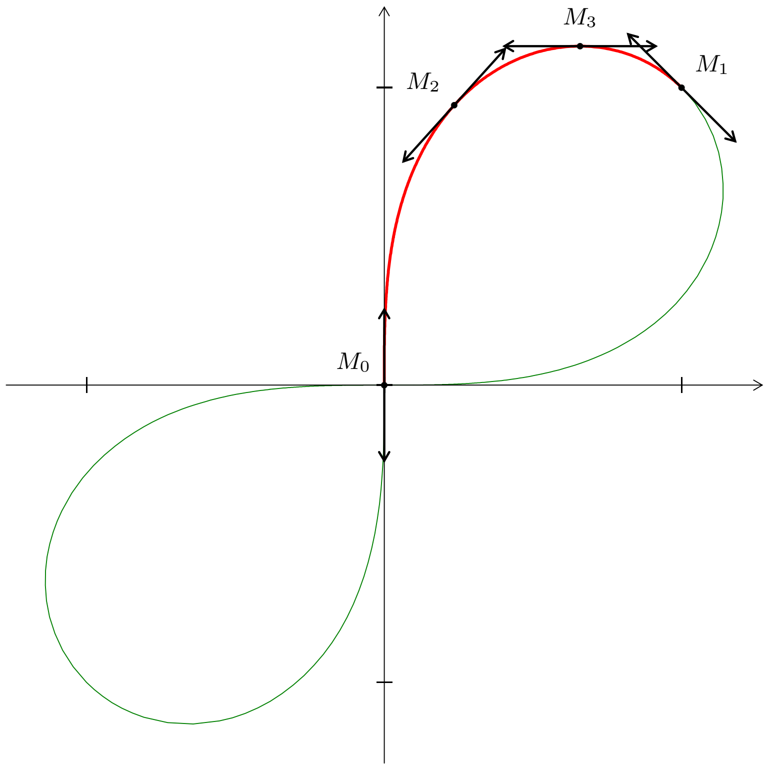
t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$	0		$+$		1
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$	$\searrow$	1
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1

4. On a le tableau de valeurs suivant :

t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	1
$x(t)$	0	$\frac{4}{17}$	$\frac{3^{9/4}}{18}$	1
$y(t)$	0	$\frac{16}{17}$	$\frac{3^{3/4}}{2}$	1
$x'(t)$	0	$\frac{376}{289}$	$\frac{3^{3/2}}{3}$	1
$y'(t)$	2	$\frac{416}{289}$	0	-1

5. On a : $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{t^2}$ tend vers 0_+ quand $t \to +\infty$ (donc $\mathcal{L}$ admet une asymptote horizontale quand $t \to +\infty$) et tend vers $+\infty$ quand $t \to 0_+$ (donc $\mathcal{L}$ admet une asymptote verticale quand $t \to 0_+$).

6. Voici la courbe $\mathcal{L}$. *Remarque :* M_0 désigne $M(0)$, M_1 désigne $M(1)$, M_2 désigne $M(1/2)$ et M_4 désigne $M(1/\sqrt[4]{3})$.



7. $M(x,y)$ est invariant par $f \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-(x^2+y^2)) = 0 \\ y(1-(x^2+y^2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$ car f est définie pour tout point du plan privé de l'origine.
Donc l'ensemble C des points invariants par f est le cercle de centre O et de rayon 1.

8. On a : $X(t) = \dfrac{x(t)}{x(t)^2+y(t)^2} = \dfrac{t}{2}$ et $Y(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)^2+y(t)^2} = \dfrac{1}{2t}$.

9. On a : $X(t) \times Y(t) = \dfrac{1}{4}$. Donc la courbe image est une hyperbole.

Corrigé écrit par David-Yann VINCENT, david-yann.vincent@ac-rouen.fr (si vous trouvez une "coquille", merci de me la signaler)