Corrigé

Exercice 1

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire, donc $\boxed{f(0) = 0}$.
2. On trace le graphe de f sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$; ensuite, par 2π-périodicité, le graphe sur $[-\pi\,;0[$ est le même que sur $[\pi\,;2\pi[$, et le graphe sur $[2\pi\,;3\pi]$ le même que sur $[0\,;\pi]$. On obtient donc le graphe de f sur $[-\pi\,;3\pi]$ (voir figure 1) :

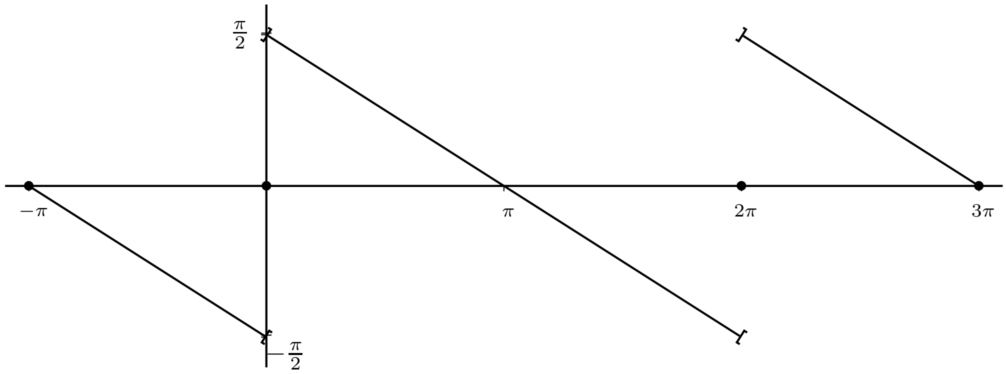

Figure 1 – Représentation graphique de la fonction f

3. On définit les coefficients de Fourier a_0, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de f par :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ \mathrm{d}x\ ,$$

$$\text{et :}\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x \quad\text{et}\quad b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x\ .$$

Par 2π-périodicité de f et de la fonction $x \mapsto \cos(nx)$, on peut écrire :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x \quad\text{et}\quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x\ ,$$

puis comme f est impaire et $x \mapsto \cos(nx)$ paire, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = 0}\ .$$

Il reste à calculer les coefficients b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\times\frac{\pi - x}{2}\times\cos(nx)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\ \mathrm{d}x \qquad \text{(par intégration par parties)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\cos(2n\pi) + \frac{\pi}{2n}\cos(0)\right) - \frac{1}{2\pi n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{n} \qquad \text{puisque } \cos(0) = \cos(2n\pi) = 1 \text{ et } \sin(0) = \sin(2n\pi) = 0.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n}}.$$

La série de Fourier associée à f au point $x \in \mathbb{R}$ est donc la série $\boxed{S_f(x) = \sum \frac{\sin(nx)}{n}}$.

Comme la fonction f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet s'applique et montre que la série de Fourier associée à f au point x est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a de plus la valeur de sa somme :

- si x est un point de continuité de f, alors : $S_f(x) = f(x)$;
- si x est un point de discontinuité de f, alors : $S_f(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Or les points de discontinuité de f sont les $2n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Par 2π-périodicité de f, on a :

$$\frac{f((2n\pi)^+) + f((2n\pi)^-)}{2} = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2} = 0 = f(0) \ ,$$

donc on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x)}. \tag{1}$$

4. Remarquons que, comme g est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire, on a $g(0) = 0$. On trace ensuite le graphe de g sur l'intervalle $[0 \ ; \pi]$; puis, comme g est impaire, on obtient son graphe sur $[-\pi \ ; 0]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère. Enfin, par 2π-périodicité, le graphe de g sur $[\pi \ ; 3\pi]$ est le même que sur $[-\pi \ ; \pi]$. On obtient donc le graphe de g sur $[-\pi \ ; 3\pi]$ (voir figure 2) :

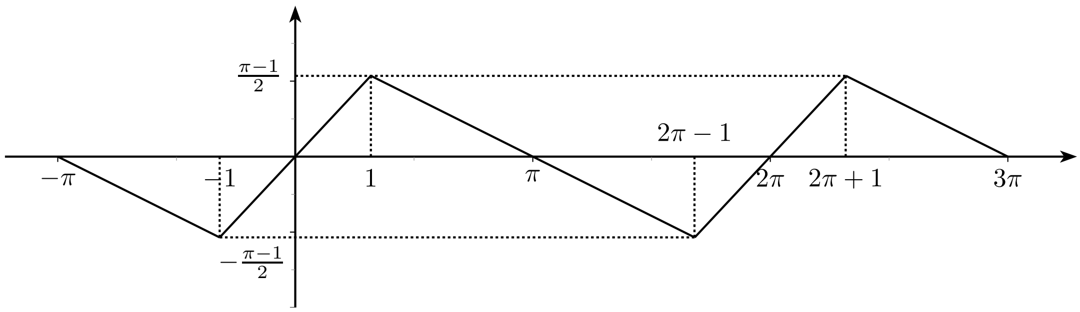

FIGURE 2 – Représentation graphique de la fonction g

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin(nx) \ \mathrm{d}x &= \left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(nx)}{n} \ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\cos(n)}{n} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^1 \\
&= -\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 x\sin(nx) \ \mathrm{d}x = -\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2}}.$$

Comme f et g sont égales sur l'intervalle $]1\,;\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (g(x)-f(x))\sin(nx)\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 (g(x)-f(x))\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x(\pi-1)}{2}-\frac{\pi-x}{2}\right)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\int_0^1 x\sin(nx)\ \mathrm{d}x - \int_0^1 \sin(nx)\ \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos(n)}{n}+\frac{\sin(n)}{n^2}-\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^1\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin(n)}{n^2}-\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^\pi (g(x)-f(x))\sin(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin(n)}{n^2}-\frac{1}{n}\right)}.$$

On définit les coefficients de Fourier α_0, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de g par :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\ \mathrm{d}x\ ,$$

$$\text{et :}\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \alpha_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x\ .$$

Comme g est impaire et $x\mapsto\cos(nx)$ est paire, on déduit, comme à la question 3, que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \alpha_n = 0}.$$

Il reste à calculer les coefficients β_n pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \qquad (\text{par } 2\pi\text{-périodicité de la fonction } x\mapsto g(x)\sin(nx)) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \qquad (\text{par parité de la fonction } x\mapsto g(x)\sin(nx)) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\pi (g(x)-f(x))\sin(nx)\ \mathrm{d}x + \int_0^\pi f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin(n)}{n^2}-\frac{1}{n}\right) + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x}_{=\,b_n\,=\,\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\sin(n)}{n^2}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \beta_n = \frac{\sin(n)}{n^2}}.$$

La série de Fourier associée à g au point $x\in\mathbb{R}$ est donc la série $\boxed{S_g(x) = \sum \frac{\sin(n)\sin(nx)}{n^2}}$.

6. Comme la fonction g est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet s'applique et montre que la série de Fourier associée à g au point x est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$; on a de plus la valeur de sa somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_g(x) = g(x) \ ,$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)\sin(nx)}{n^2}} \ . \tag{2}$$

7. La relation (1) appliquée en $x = 1$ donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2} \ ,$$

et la relation (2) appliquée en $x = 1$ donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = g(1) = f(1) = \frac{\pi - 1}{2} \ .$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}} \ .$$

8. Le théorème de Parseval appliqué à la fonction g s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(x))^2 \ \mathrm{d}x = \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right) \ ,$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_0^{2\pi} (g(x))^2 \ \mathrm{d}x \ .$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (g(x))^2 \ \mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (g(x))^2 \ \mathrm{d}x \qquad \text{(par } 2\pi\text{-périodicité et parité de } g^2\text{)} \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 x^2 \left(\frac{\pi - 1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_1^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \right] \qquad \text{(relation de Chasles)} \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\pi - 1}{2}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^3 \right]_1^{\pi} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\pi - 1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi - 1}{2}\right)^3 \right) \\
&= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\pi - 1}{2}\right)^2 \left(1 + 2 \times \frac{\pi - 1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi - 1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(\pi - 1)^2}{6}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}} \ .$$

Exercice 2

Partie A

1. On a $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 27$, ce qui signifie que la famille $\mathscr{B}'$ est une famille libre, donc forme une base de E.
   On vérifie aussi que les produits scalaires $\overrightarrow{\imath'} \cdot \overrightarrow{\jmath'}$, $\overrightarrow{\imath'} \cdot \overrightarrow{k'}$ et $\overrightarrow{\jmath'} \cdot \overrightarrow{k'}$ sont nuls : les vecteurs $\overrightarrow{\imath'}$, $\overrightarrow{\jmath'}$ et $\overrightarrow{k'}$ sont donc orthogonaux deux à deux.
   $\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' \text{ est alors une base orthogonale de } E.}$
2. Par calcul, on obtient
   $$S^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I.$$
   Ensuite,
   $$S^2 = 9I \iff \frac{1}{9}S \times S = S \times \left(\frac{1}{9}S\right) = I,$$
   ce qui montre que $\boxed{S \text{ est inversible, et } S^{-1} = \frac{1}{9}S}$.
3. On a :
   $$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   Ceci signifie que $\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{\imath'} (\neq \overrightarrow{0}) \text{ est un vecteur propre de la matrice } A \text{ associé à la valeur propre } \lambda_1 = -9}$.
   On vérifie de même que :
   $$A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   ce qui signifie que $\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{\jmath'} (\neq \overrightarrow{0}) \text{ est un vecteur propre de la matrice } A \text{ associé à la valeur propre } \lambda_2 = 9}$.
   Et enfin :
   $$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$
   ce qui signifie que $\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{k'} (\neq \overrightarrow{0}) \text{ est un vecteur propre de la matrice } A \text{ associé à la valeur propre } \lambda_2 = 9}$.
   La matrice A admet alors -9 comme valeur propre simple et 9 pour valeur propre double. La dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre double est 2. Par conséquent, la matrice A est diagonalisable dans cette base de vecteurs propres.
   $\boxed{\text{La matrice de passage de la base } \mathscr{B} \text{ à la base } \mathscr{B}' \text{ est, avec les notations de l'énoncé, la matrice } S.}$
   La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est
   $$D_1 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$
   Nous avons alors, grâce à la formule de changement de base
   $$\begin{aligned} & D_1 = S^{-1}AS \\ \iff & A = SD_1S^{-1} \\ \iff & A = SD_1\left(\frac{1}{9}S\right) \\ \iff & A = S\left(\frac{1}{9}D_1\right)S \\ \iff & A = SDS \end{aligned}$$
   avec
   $$\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

On a, comme $D^2 = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{pmatrix} = I$,

$$\begin{aligned} A^2 &= SDS \times SDS \\ &= SDS^2DS \\ &= 9SD^2S \qquad \text{(puisque } S^2 = 9I) \\ &= 9S^2 \\ &= 81I. \end{aligned}$$

Partie B

1. En posant

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}$$

on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix},$$

et le système (SD) se transforme en écriture matricielle sous la forme

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $U(t) = SX(t)$, d'où

$$\begin{aligned} U'(t) &= SX'(t) \\ &= SAX(t) \\ &= S\,(SDS)\,X(t) \\ &= S^2DSX(t) \\ &= 9ID\,(SX(t)) \\ &= 9DU(t). \end{aligned}$$

En traduisant ceci à l'aide des composantes, nous obtenons :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = -9u(t) \\ v'(t) = 9v(t) \\ w'(t) = 9w(t). \end{cases}}$$

Nous avons la condition initiale suivante : $U(0) = SX(0) = \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{cases} u(0) = 27 \\ v(0) = 27 \\ w(0) = 0. \end{cases}}$$

3. En résolvant chacune des équations différentielles linéaires du premier ordre, nous obtenons :

$$\exists (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = k_1 \mathrm{e}^{-9t} \\ v(t) = k_2 \mathrm{e}^{9t} \\ w(t) = k_3 \mathrm{e}^{9t}. \end{cases}$$

Compte tenu des conditions initiales, nous avons finalement :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = 27\mathrm{e}^{-9t} \\ v(t) = 27\mathrm{e}^{9t} \\ w(t) = 0, \end{cases}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} 27\mathrm{e}^{-9t} \\ 27\mathrm{e}^{9t} \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note m_t le point de coordonnées $(u(t), v(t), w(t))$ dans le repère $\mathcal{R}'$ (qui est orthogonal *mais* pas orthonormé comme le dit l'énoncé) ; on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{Om_t}$ a pour coordonnées $(27\mathrm{e}^{-9t}, 27\mathrm{e}^{9t}, 0)$ dans la base $\mathscr{B}'$, donc qu'il appartient au plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{\imath'}$ et $\overrightarrow{\jmath'}$. Le vecteur $\overrightarrow{k'}$ étant orthogonal à ce plan, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{k'}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{Om_t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $\boxed{\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k'}}$, et on a :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{Om_t}}.$$

4. Puisque S est inversible et que $S^{-1} = \frac{1}{9}S$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = SX(t) \Longleftrightarrow X(t) = \frac{1}{9}SU(t).$$

On obtient donc comme unique solution du système différentiel (SD) vérifiant les conditions initiales (CI) :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = 3\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-9t} + 2\mathrm{e}^{9t} \\ 2\mathrm{e}^{-9t} - 2\mathrm{e}^{9t} \\ 2\mathrm{e}^{-9t} + \mathrm{e}^{9t} \end{pmatrix}},$$

soit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = 3\mathrm{e}^{-9t} + 6\mathrm{e}^{9t} \\ y(t) = 6\mathrm{e}^{-9t} - 6\mathrm{e}^{9t} \\ z(t) = 6\mathrm{e}^{-9t} + 3\mathrm{e}^{9t}. \end{cases}}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note M_t le point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ dans le repère $\mathcal{R}$; on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ a pour coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ dans la base $\mathscr{B}$. Notons alors $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ dans la base $\mathscr{B}'$, et notons $X_2(t)$ la matrice colonne :

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}.$$

On a alors, par la formule de changement de base :

$$X(t) = SX_2(t),$$

puis, comme S est inversible et que $S^{-1} = \frac{1}{9}S$, on obtient :

$$X_2(t) = \frac{1}{9}SX(t) = \frac{1}{9}U(t),$$

ce qui montre que le vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{Om_t}$ par l'homothétie de rapport $\frac{1}{9}$, ou encore que $\boxed{\text{le point } M_t \text{ est l'image du point } m_t \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport } \frac{1}{9}}$.

On en déduit en particulier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{OM_t}$ et $\overrightarrow{Om_t}$ sont colinéaires, donc que tout vecteur orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre. Ceci montre qu'on peut choisir $\boxed{\overrightarrow{N} = \overrightarrow{n} = \overrightarrow{k'}}$, et qu'on a alors :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{OM_t}}.$$

5. La propriété précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{OM_t}$$

équivaut, en termes de produit scalaire, à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM_t} \cdot \overrightarrow{N} = 0.$$

En traduisant cette égalité à l'aide des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, on obtient que :
$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ le point } M_t \text{ appartient au plan } \mathcal{P} \text{ d'équation } 2x + y - 2z = 0 \text{ dans le repère } \mathcal{R}}$.

6. On se place dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath}\right)$ (notons au passage que c'est un repère du plan $\mathcal{P}$ défini à la question 5), et on s'intéresse, dans ce repère, à la courbe de représentation paramétrique $(u(t), v(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$, que l'on appelle $\mathcal{C}$.
On remarque d'abord que : $\forall t \in \mathbb{R}, u(t)v(t) = 27^2$, et que les fonctions u et v sont toujours strictement positives, ce qui montre que $\mathcal{C}$ est incluse dans la branche située dans le quadrant $\{x > 0, y > 0\}$ de l'hyperbole d'équation cartésienne $xy = 27^2$.
Réciproquement, soient (x, y) les coordonnées d'un point de la branche située dans le quadrant $\{x > 0, y > 0\}$ de l'hyperbole d'équation cartésienne $xy = 27^2$. Alors en posant $t = -\frac{1}{9}\ln\left(\frac{x}{27}\right)$, on a :

$$x = 27\mathrm{e}^{-9t} = u(t) \quad \text{et} \quad y = \frac{27^2}{x} = 27\mathrm{e}^{9t} = v(t).$$

Ceci montre que :
$\boxed{\mathcal{C} \text{ est la branche située dans le quadrant } \{x > 0, y > 0\} \text{ de l'hyperbole d'équation cartésienne } xy = 27^2}$.
La courbe $\mathcal{C}$ est la courbe que décrit le point m_t lorsque $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, la courbe $\mathcal{H}$ est la courbe décrite par le point M_t lorsque $t \in \mathbb{R}$. Or on a vu à la question 3 que le point M_t est l'image du point m_t par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{9}$. On en déduit donc que la courbe $\mathcal{H}$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{9}$, ou autrement dit que :
$\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ est l'image de la courbe } \mathcal{H} \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport } 9}$.
*R*emarque : on obtient donc une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{H}$ dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath}\right)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_2(t) = 3\mathrm{e}^{-9t} \\ y_2(t) = 3\mathrm{e}^{9t}, \end{cases}$$

ce qui montre que $\mathcal{H}$ est aussi une branche d'hyperbole : la branche située dans le quadrant $\{x > 0, y > 0\}$ de l'hyperbole d'équation cartésienne $xy = 9$.

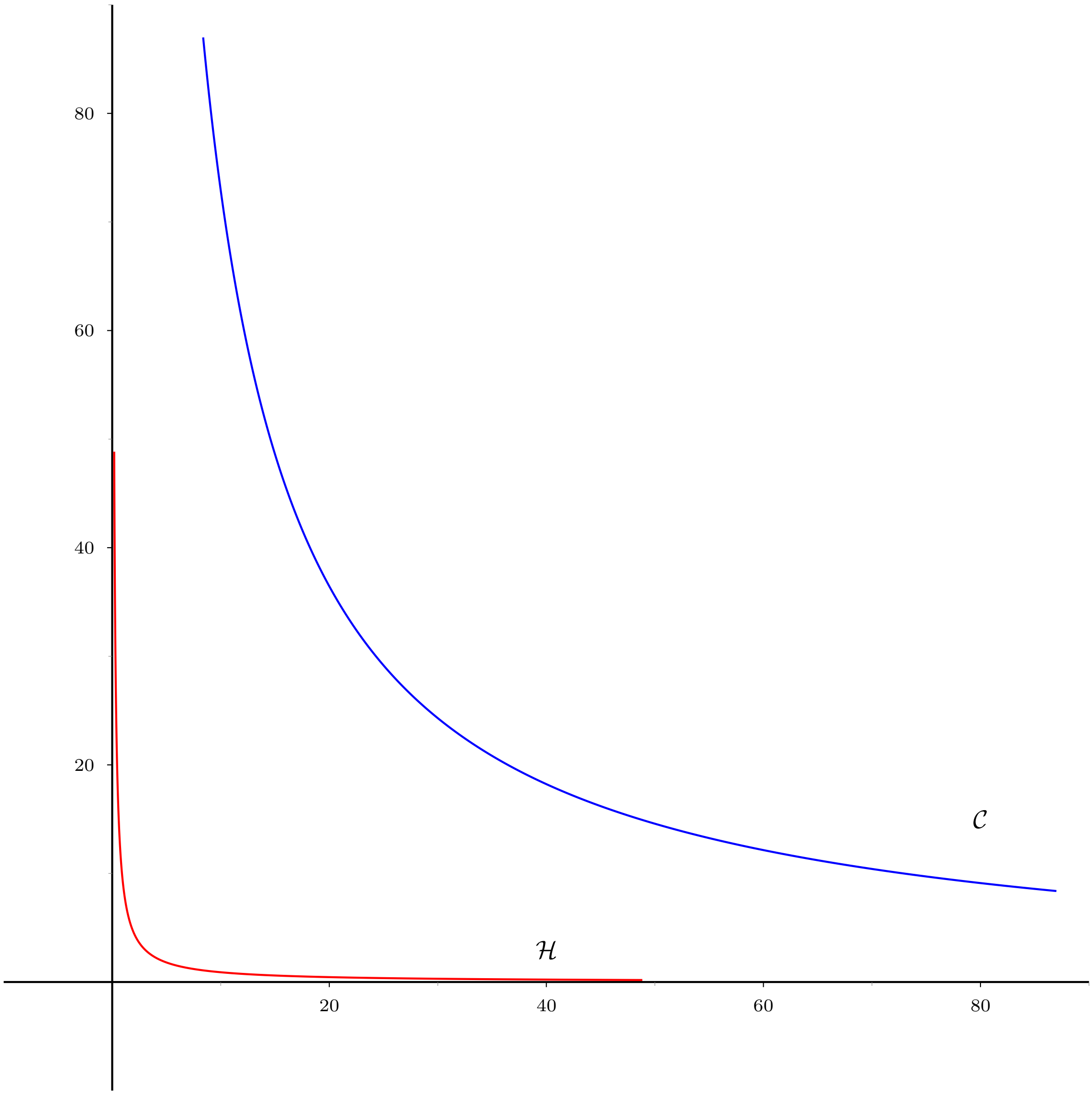

FIGURE 3 – Courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ dans le plan $\mathcal{P}$

Exercice 3

1. (a) La fonction $v \mapsto \cos v$ est continue et ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction $v \mapsto \frac{1}{\cos v}$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ comme l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Pour tout $x \in]-\pi; \pi[$, on a $\left[0, \frac{x}{2}\right] \subset]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et donc $v \mapsto \frac{1}{\cos v}$ est continue sur $\left[0, \frac{x}{2}\right]$. Elle admet donc une primitive notée P. L'intégrale définissant $f(x)$ est donc bien définie pour tout $x \in]-\pi; \pi[$ et

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad f(x) = \Big[P(v)\Big]_0^{x/2} = P\left(\frac{x}{2}\right) - P(0).$$

Or P est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc f est dérivable comme composée sur $]-\pi, \pi[$ et

$$\boxed{\forall x \in]-\pi, \pi[, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\, P'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\cos(x/2)}.}$$

La fonction f est définie sur $]-\pi, \pi[$ qui est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in]-\pi; \pi[$. Par le changement de variable $u = -v$ et en utilisant la parité de la fonction cos, on a

$$\forall x \in]-\pi; \pi[, \quad f(-x) = \int_0^{-x/2} \frac{\mathrm{d}v}{\cos v} = \int_0^{x/2} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\cos(-u)} = -\int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}u}{\cos(u)} = -f(x)$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc impaire.}}$

Pour étudier les variations de f sur $]-\pi,\pi[$ il suffit donc d'étudier ses variations sur $[0,\pi[$. Or si $x\in[0,\pi[$, alors $x/2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(x/2)>0$ donc $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $[0,\pi[$. Comme f est impaire, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-\pi;\pi[.}$$

(b) On sait qu'au voisinage de $0, \sin u \underset{0}{\sim} u$ donc

$$\boxed{\text{Au voisinage de } 0, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\underset{0}{\sim} u.}$$

Soit $x\in[0,\pi[$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on effectue le changement de variables $v=\frac{\pi}{2}-u$: on a $\mathrm{d}v=-\,\mathrm{d}u$, la borne $v=0$ devient $u=\frac{\pi}{2}$ et la borne $v=\frac{x}{2}$ devient $u=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$. On obtient donc

$$f(x)=\int_0^{x/2}\frac{\mathrm{d}v}{\cos(v)}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}\frac{-\,\mathrm{d}u}{\cos(\pi/2-u)}=\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sin u}.$$

Or sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, les fonctions $u\mapsto\frac{1}{\sin u}$ et $u\mapsto\frac{1}{u}$ sont continues et strictement positives et elles sont équivalentes au voisinage de 0. Les deux intégrales généralisées $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{u}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sin u}$ sont donc de même nature.
Or la première est divergente car $\lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=+\infty$ (intégrale de Riemann) donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin u}\,\mathrm{d}u$ est divergente et $\lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin u}\,\mathrm{d}u=+\infty$.
Comme $\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=0^+$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sin u}=+\infty}.$$

De plus f est continue et strictement croissante sur $[0,\pi[$ donc par le théorème de la bijection continue, f est une bijection de $[0;\pi[$ sur $[f(0);\lim_{x\to\pi^-}f(x)[=[0;+\infty[$. Comme de plus f est impaire, on en conclut que

$$\boxed{f \text{ est une bijection de }]-\pi;\pi[\text{ dans } \mathbb{R}.}$$

2. (a) f est une bijection de $]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\pi;\pi[$ et pour tout $x\in]-\pi;\pi[$, $f'(x)=\frac{1}{2\cos(x/2)}\neq0$ car le cosinus ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
Sa réciproque g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y\in\mathbb{R},\qquad g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}=\frac{1}{\frac{1}{2\cos(g(y)/2)}}\qquad\text{donc}\qquad\boxed{\forall y\in\mathbb{R},\qquad g'(y)=2\cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)}$$

Comme g et la fonction cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad g''(y)=-g'(y)\ \sin\left(\frac{g(y)}{2}\right)=-2\ \cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)\ \sin\left(\frac{g(y)}{2}\right)=\boxed{-\ \sin\Big(g(y)\Big).}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$g''(t)+\sin(g(t))=0\quad\text{ et } g(0)=0 \text{ car } f(0)=0,\quad \text{ et }\ g'(0)=2\cos(0)=2>0$$

Donc

$$\boxed{t\mapsto g(t)\text{ est solution de } X''(t)+\sin(X(t))=0\quad\text{avec } t\geqslant0,\ X(0)=0,\ X'(0)=2.}$$

3. La décomposition en éléments simples de $\frac{2}{1-u^2}$ est $\frac{2}{1-u^2}=\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}$, donc pour tout $t\in]-1;1[$,

$$\begin{aligned}h(t)&=\int_0^t\frac{2\ \mathrm{d}u}{1-u^2}\\&=\int_0^t\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\ \mathrm{d}u\\&=\Big[-\ln|1-u|+\ln|1+u|\Big]_0^t\\&=-\ln|1-t|+\ln|1+t|.\end{aligned}$$

Or $t \in]-1;1[$ donc $1+t>0$ et $1-t>0$ donc

$$\boxed{\forall t \in]-1;1[, \quad h(t) = \int_0^t \frac{2\ \mathrm{d}u}{1-u^2} = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).}$$

4. (a) Soit $x \in]-\pi,\pi[$. On pose $u = \tan\left(\frac{v}{2}\right)$. Comme dans l'intégrale définissant $f(x)$, $v \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on a $v/2 \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ et donc

$$\arctan u = \arctan\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right) = \frac{v}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{v = 2\arctan u} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{d}v = \frac{2}{1+u^2}\ \mathrm{d}u.}$$

(b)

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\tan^2(v/2)}{1+\tan^2(v/2)} = \frac{\cos^2(v/2)-\sin^2(v/2)}{\cos^2(v/2)+\sin^2(v/2)} = \frac{2\cos^2(v/2)-1}{1} = \cos(v).$$

(c) Soit $x \in]-\pi,\pi[$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on effectue le changement de variables $u = \tan(v/2)$: la borne $v=0$ devient $u = \tan(0) = 0$ et la borne $v = x/2$ devient $u = \tan(x/4)$ et avec les questions précédentes, on a

$$f(x) = \int_0^{\tan(x/4)} \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}}\ \frac{2}{1+u^2}\ \mathrm{d}u = \int_0^{\tan(x/4)} \frac{2}{1-u^2}\ \mathrm{d}u = h(\tan(x/4)),$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in]-\pi;\pi[, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+\tan(x/4)}{1-\tan(x/4)}\right).}$$

Exercice 4

1. Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, et θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$; on en déduit que $\boxed{\text{les coordonnées de } M \text{ sont : } (\cos(\theta), \sin(\theta))}$.
Le point M' est le projeté orthogonal de M sur la droite (OA) ; il a donc la même abscisse que M, et 0 pour ordonnée ; $\boxed{\text{les coordonnées de } M' \text{ sont donc : } (\cos(\theta), 0)}$.
Le point O' est le milieu du segment $[AM]$: $\boxed{O' \text{ a donc pour coordonnées } \left(\frac{1+\cos(\theta)}{2}, \frac{\sin(\theta)}{2}\right)}$.

2. Soit $\theta \in [0\ ;\pi[$. On note $(x(\theta), y(\theta))$ les coordonnées du point H. Le point H appartient à la droite (MM'), il a donc la même abscisse que M et M', ce qui donne : $x(\theta) = \cos(\theta)$.
Pour trouver son ordonnée, on se place dans le triangle OHM' qui est rectangle en H.
On a : $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{HM'}{OM'}$, ce qui donne :

$$HM' = y(\theta) = \cos(\theta)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\text{les coordonnées de } H \text{ sont } (x(\theta), y(\theta)) = \left(\cos(\theta), \cos(\theta)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}.$$

3. On a défini deux fonctions : $x : \begin{array}{ccc} [0\ ;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta) \end{array}$ et $y : \begin{array}{ccc} [0\ ;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array}$.
Ces deux fonctions sont dérivables sur l'intervalle $[0\ ;\pi[$, puisque la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0\ ;\pi[$, et la fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}\right\}$, donc en particulier sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$.
On a :

$$\boxed{\forall \theta \in [0\ ;\pi[, \quad x'(\theta) = -\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad y'(\theta) = -\sin(\theta)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos(\theta) \times \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).}$$

4. En utilisant les formules d'angle moitié rappelées dans l'énoncé, et valables lorsque $\theta \in [0\,;\pi[$, en posant $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= -\frac{2t}{1+t^2} \times t + \frac{1-t^2}{1+t^2} \times \frac{1}{2}(1+t^2) \\ &= \frac{-4t^2 + (1-t^2)(1+t^2)}{2(1+t^2)} \\ &= \frac{-4t^2+1-t^4}{2(1+t^2)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut calculer l'expression $\cos(\theta) - \dfrac{1}{1+\cos(\theta)}$:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) - \frac{1}{1+\cos(\theta)} &= \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1}{\frac{2}{1+t^2}} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1+t^2}{2} \\ &= \frac{2(1-t^2) - (1+t^2)^2}{2(1+t^2)} \\ &= \frac{-4t^2+1-t^4}{2(1+t^2)}. \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\boxed{\forall \theta \in [0\,;\pi[, \quad y'(\theta) = \cos(\theta) - \frac{1}{1+\cos(\theta)}\ .}$$

En écrivant cette expression sous la forme d'un seul quotient, on a :

$$\forall \theta \in [0\,;\pi[, \quad y'(\theta) = \frac{\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1}{1+\cos(\theta)}\ .$$

Le trinôme du second degré $x^2 + x - 1$ a comme racines $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On connaît donc le signe de ce trinôme :

$$x^2 + x - 1 \leqslant 0 \quad \iff \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ .$$

On en déduit que :

$$\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1 \leqslant 0 \quad \iff \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant \cos(\theta) \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ .$$

Comme $1 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$, on a :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant -1 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqslant 1\ .$$

On note θ_0 l'unique réel de l'intervalle $[0\,;\pi[$ tel que $\cos(\theta_0) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (ceci découle du fait que la fonction cos est une bijection de $[0\,;\pi[$ sur $]-1\,;1]$).
Comme de plus la fonction cos prend ses valeurs entre -1 et 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1 \leqslant 0 &\iff -1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &\iff \theta_0 \leqslant \theta < \pi. \end{aligned}$$

Pour terminer, remarquons que le dénominateur de y' est strictement positif sur $[0\,;\pi[$ puisque :

$$\forall \theta \in [0\,;\pi[, \quad \cos(\theta) > -1\ .$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\forall \theta \in [0\,;\theta_0[, \quad y'(\theta) > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in [\theta_0\,;\pi[, \quad y'(\theta) \leqslant 0\ .}$$

5. Puisque la fonction sin est positive sur $[0\,;\pi[$, on a :

$$\forall \theta \in [0\,;\pi[, \quad x'(\theta) \leqslant 0\ .$$

On peut donc construire le tableau de variation conjoint des fonctions x et y :

θ	0		θ_0		π
$x'(\theta)$	0	$-$		$-$	0
x	1	$\searrow$	$\cos(\theta_0)$	$\searrow$	-1
y	0	$\nearrow$	$y(\theta_0)$	$\searrow$	$-\infty$ ||
$y'(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ||

6. Lorsque θ tend vers π, l'abscisse $x(\theta)$ de H tend vers -1 et son ordonnée $y(\theta)$ tend vers $-\infty$; ceci montre que $\boxed{\text{la droite d'équation } x = -1 \text{ est asymptote à la courbe } \Gamma}$.

7. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on calcule :

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ ; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ ; \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\ .$$

En $\theta = \theta_0$, on a $\cos(\theta_0) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = x(\theta_0)$.
Comme : $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \Longleftrightarrow t^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ où $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on obtient, pour $\theta = \theta_0$,

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5} - 2, \end{aligned}$$

d'où $t = \sqrt{\sqrt{5}-2}$ car $\theta_0 \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a alors :

$$\begin{cases} x(\theta_0) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y(\theta_0) = \sqrt{\sqrt{5}-2} \times \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

On obtient le tracé suivant : voir figure 4.

8. Soit $\theta \in [0\,;\pi[$. On pose, comme à la question 4, $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. On a alors :

$$\left(x(\theta)\right)^2 + \left(y(\theta)\right)^2 = \cos^2(\theta)\left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \times (1+t^2) = \frac{(1-t^2)^2}{1+t^2}\ ,$$

et :

$$\left(x(\theta)\right)^2 - \left(y(\theta)\right)^2 = \cos^2(\theta)\left(1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \times \frac{(1-t^2)^2}{1+t^2}\ ,$$

ce qui montre que :

$$\forall \theta \in [0\,;\pi[, \quad \left(x(\theta)\right)^2 - \left(y(\theta)\right)^2 = x(\theta) \times \left[\left(x(\theta)\right)^2 + \left(y(\theta)\right)^2\right]\ ,$$

autrement dit que :

$\boxed{\text{les coordonnées } (x, y) \text{ des points de la courbe } \Gamma \text{ vérifient l'équation : } x(x^2+y^2) = x^2 - y^2}$.

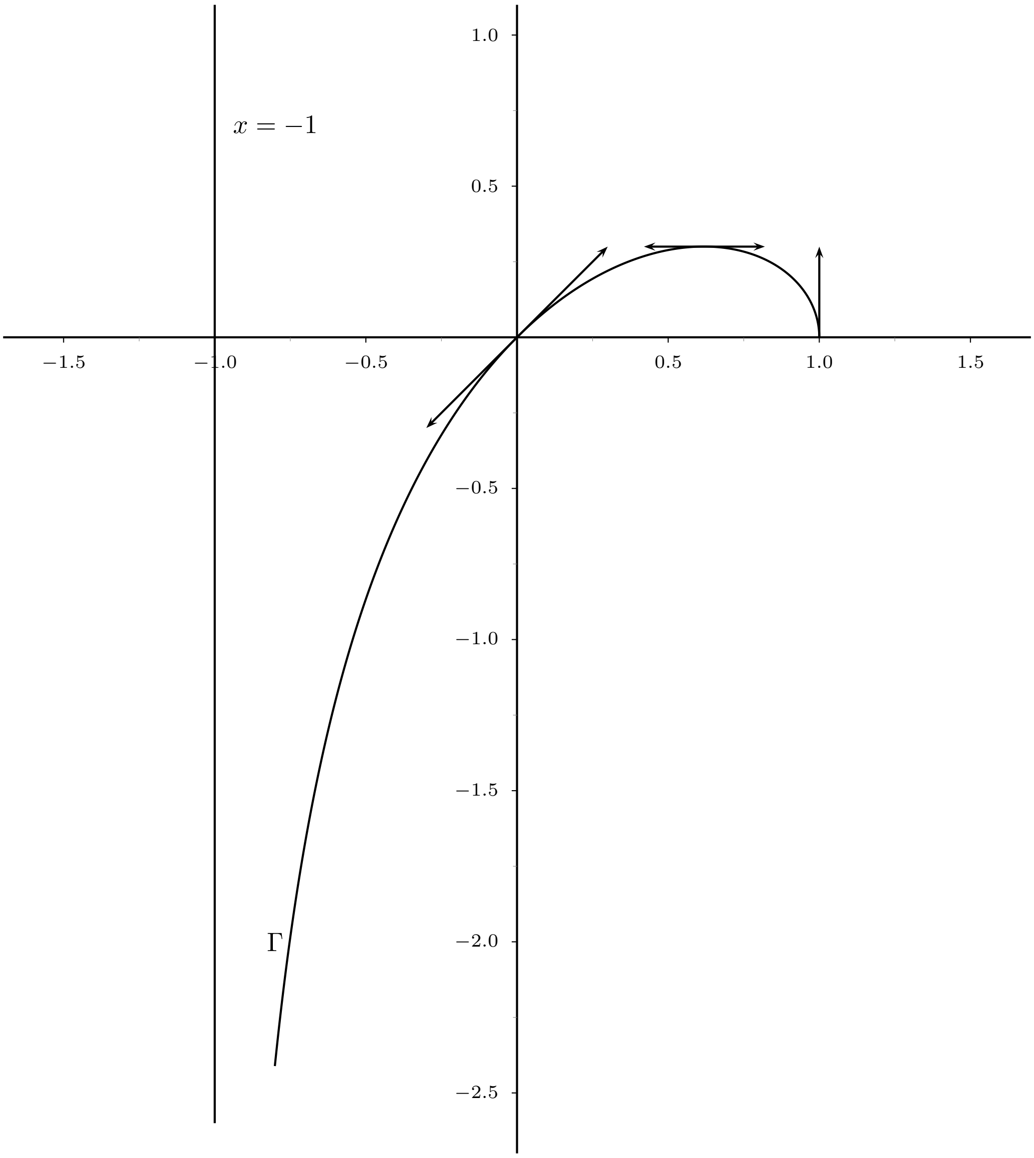

FIGURE 4 – Courbe Γ